

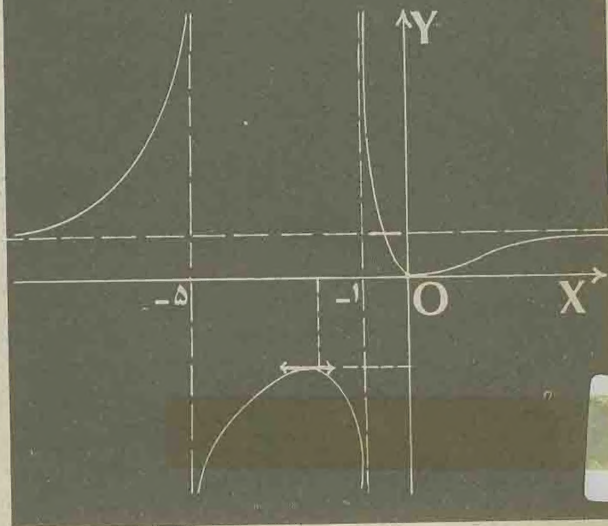
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

جبر و آنالیز

سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک



۲۹۵

بسم الله الرحمن الرحیم

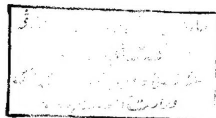
جبر و آنالیز

سال چهارم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۳۶۰



پدیدآورندگان

موءلفان	غلامرضا عسجدی	جلیل‌الله قراگزلو
	هدایت‌الله موسوی	محمدعلی واعظیان
صفحه‌پرداز	حسن صالحی	
چاپ از	چاپخانه مطبوعات	

این کتاب در سال ۱۳۶۰ مورد
تجدید نظر قرار گرفت .

دربارهٔ آرم جمهوری اسلامی ایران

از آنجا که این آرم باید محتوای حکومت اسلامی را بیان نماید و این محتویٰ چیزی نیست جز رشد و تکامل انسان به سوی " الله " (الی‌اللهالمصیر) و همین طور با توجه به این واقعیت که مابین محتوای کلام‌الهی و لحن و صوت و فرم ظاهری‌آن‌ارتباطی‌درونی وجود دارد و (شاید به همین دلیل به هنر خطاطی و ترتیل قرآن تا این حد در فرهنگ اسلامی‌توجه شده) ،کلمهٔ " الله " که هدف و غایت حکومت اسلامی و اساسا" غایت هستی است به‌عنوان مبنای فرم آرم انتخاب گردیده است و در جهت تکامل بخشیدن و تبدیل شکل این کلمه به صورت یک آرم و با مشخصات و امکاناتی که‌یک آرم از هر نظر باید دارا باشد سعی‌گردیده‌است که مفاهیم مورد نظر در نهایت خلوص، سادگی و ایجاز، در قالبی متناسب با محتویٰ بیان گردد آن‌هم بیانی استعاره‌گونه به‌جهت اینکه‌فرم آرم خود هویّت و شخصیّت مستقلی را ورای خط نوشته‌های معمولی دارا باشد. بر این اساس با تجزیه و خلاصه کردن شکل کلمه " الله" سعی گردیده تا علاوه بر اینکه کلمه " الله " از خلال فرم خوانده می‌شود عناصر آن طوری انتخاب‌گردد تا ترکیب آرم‌نیز خود چیزی بیشتر از یک خط نوشته بوده به طور رمزی مفاهیم‌و نشانه‌های‌یک حکومت اسلامی‌باشد. نشانه‌هایی‌که‌علاوه بر مبنای‌فکری حکومت (کتاب ــ ذکر) در قرآن ازآنها به "میزان" و "حدید " تعبیرگردیده است . به این ترتیب اصلی‌ترین مفاهیمی را که باید در فرم مستتر باشند این‌طور می‌شود فهرست گردد:

" کتاب " (توحید ، اصول پایهٔ دین ...) "میزان" (تعادل و توازن ...) .

" حدید " (قدرت واستحکام ......) و "رشد ".

ویژگیهای اصلی ترکیب فرم عبارتند از :

ــ ترکیب و بیان‌فرم کلمهٔ " الله " یا پنج عنصرتشکیل دهنده اصلی که چهار عنصرآن به شکل‌هلالی انتخاب شده‌است در مجموع یادآور یک‌فرم گیاهی‌است . و بیانگر مفهوم (رشد) است.

لازم به‌توضیح است که شکل هلالی همان شکلی است که امضای مشهور حضرت محمد (ص) از آن تشکیل می‌شود.

ــ خطوط هادی این هلالی‌ها نصف‌النهارهای کرهٔ زمین را تجسم می‌بخشند و از این‌راه اشاره‌ای به جهانی‌بودن این عقیده دارند.

ـ پنج جزء اصلی آرم نشانهٔ پنج اصل پایهٔ اسلام (توحید ، نبوت ، عدل ، امامت ، معاد) است که اصل توحید در میان ، حکم عمود و ساقه اصلی را داراست (اصولا " عدد پنج در فرهنگ اسلامی شیعی جای خاصی دارد که علاوه بر اشاره به پنج اصل دین ، پنج تن و خود به عنوان یک عدد در هندسه و حساب مبنائی است برای اشکال و تناسبات طلائی که بخش مهمی را در هنر اسلامی تشکیل میدهد) .

ـ عناصر ترکیب به نحوی خلاصه شده‌اند ، تا ضمن بیان " الله " عصاره‌ای از کلمهٔ توحید یعنی " لااله‌الاالله " را نیز در خود مستتر داشته باشد .

(نحوهٔ تطوّر آرم در جهت بیان "لااله‌الاالله " در نموداری نشان داده شده است) .

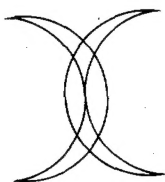
ـ جزء قائم میانی در ترکیب با فرم تشدید (ّ) ضمن یادآوری شکل شمشیر خود به فرم قائم و ایستاده نمادی است از قدرت و استحکام و ایستادگی (حدید ـ آهن) .

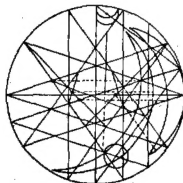
فرم تشدید (ّ) که در خط عربی و فارسی شدّت را می‌رساند در اینجا نیز برای اشاره به فرم شمشیر و از این‌راه مفهوم " حدید " بکار گرفته شده است (انزلنا "الحدید" فیه بأس "شدید ") .

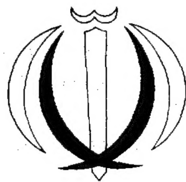
ـ ترکیب کاملا " متقارن شکل بیانی است از حالت تعادل و توازن (میزان) .

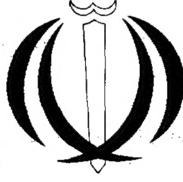
ـ بالاخره بزرگترین و اصلی‌ترین ویژگی ترکیب (ویژگی لازم و کافی) همانا بیان کلمهٔ "الله " است که خود هم قالب است و هم محتویٰ .

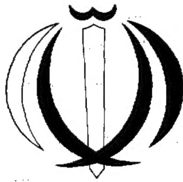
ـ نظام هندسی و طرز ترسیم آرم (که در یک دایره محاط است و نقاط راهنمای آن به کمک تقاطع دو ستارهٔ پنج پر به دست می‌آید) .

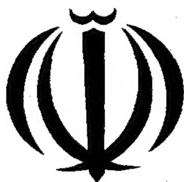












لا   اله   الّا   الله

فهرست

فصل ۱

یاد آوری و تکمیل

بیشتر مطالب این فصل و فصل ۲ همان مطالبی است که در کتاب حساب و جبر سال سوم با آنها آشنا شده‌اید. چون این مطالب اهمیت زیادی دارند آنها را یادآوری نموده و در جهت تکمیل آنها مطالبی اضافه می‌کنیم. چون این مطالب را قبلا خوانده‌اید مسلم است که سرعت فراگیری آنها زیاد خواهد بود.

۱-۱- تعریف تابع

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. f زیر مجموعه‌ای از حاصلضرب دکارتی A × B (یعنی یک رابطه از A به B) را یک تابع گویند هرگاه f∋(a و b) و f∋(a و b′)، آنگاه b = b′. به عبارت دیگر f مجموعه‌ایست از جفت‌های مرتب در A × B به قسمی که هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.

مثال: دو مجموعه A = {۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵} و B = {−۱ و ۰ و ۳ و ۵} مفروض است حاصلضرب دکارتی A × B عبارتست از:

A × B = {(۱ و −۱) و (۱ و ۰) و ... و (۲ و −۱) و ... و (۳ و ۰) و ... و (۴ و ۳) و ...}

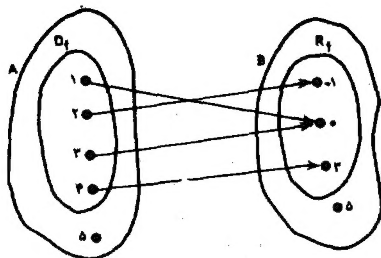
رابطه f = {(۱ و ۰) و (۲ و −۱) و (۳ و ۰) و (۴ و ۳)}

یك زیرمجموعهٔ A × B را درنظر می‌گیریم. رابطه f یک تابع است، زیرا هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیستند.

۱-۲- دامنهٔ تعریف و برد تابع

مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای تابع f را دامنهٔ (دامنهٔ تعریف) f و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را برد f می‌خوانند و آنها را به‌ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند.

مثال: فرض کنید A = {۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵} و B = {−۱ و ۰ و ۳ و ۵} و شکل صفحهٔ بعد تابع f را مشخص می‌کند. دامنه و برد f را مشخص کنید.



$D_f = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴\}$ و $R_f = \{-۱ و ۰ و ۳\}$

۱-۳- مقدار تابع

وقتی $(x و y)$ عضو دلخواهی از f باشد y را مقدار تابـع f در x می‌خوانند و معمولا آن را به‌صورت $y = f(x)$ می‌نویسند. در این مقام مؤلفه اول، یعنی x، را متغیـر مستقل ومؤلفهٔ دوم، یعنی y، را متغیر تابع میخوانند، توجه کنید که تابع f، که مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، بامقدارآن در x، یعنی $f(x)$، فرق دارد.

هرگاه f یـك تابع باشد ، مؤلفه دوم هر زوج مرتب در f بطور یگانه‌ای از روی مؤلفه اول آن زوج مرتب مشخص می‌شود و بدین‌ترتیب از روی f قـانون یا دستـوری بدست می‌آیدکه به‌کمك آن می‌توان به هر عضو x از D_f یك و تنها یك عضو y متعلق بـه R_f متناظر ساخت به‌قسمی که $(x و y) \in f$. به عکس هرگاه دستور یا قانونـی داشته باشیم که به هر عضو x از یك زیر مجموعهٔ A یك و تنها یـك عضو $y \in B$ را نسبت دهـد، مجموعـهٔ همهٔ زوجهای مرتب $(x و y)$ که به این ترتیب حاصل می‌شود تابعی از A بـه B نامیده می‌شود از ایـن رو معمولا برای مشخص کردن تابع،دامنهٔ آن و قانون یا دستور را می‌دهند، و اگر دامنه داده نشود باید آن را بزرگترین زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ مرجع (مورد بحث) اختیارکرد که آن قانون برای آن زیر مجموعه با معنی است.

مثال ۱: تابع f به شکل زیر داده شده است:

$$f = \{(x و y) | x \in N و x < ۵ و y = x^۲ - ۴x + ۳\}$$

تابع f را به شکل زوجهای مرتب بنویسید (N مجموعهٔ اعداد طبیعی است.)

حل:

$$f = \{(۳ و ۴) و (۰ و ۳) و (۱- و ۲) و (۰ و ۱)\}$$

مثال ۲: دامنهٔ تعریف تابع زیر را مشخص کنید:

$$f = \{(x و y) | y = \sqrt{۱ - x^۲}\}$$

جواب: دامنهٔ تعریف آن چنین است :

$$D_f=\{x|\ ۱-x^۲\geqslant ۰\}$$

$$۱-x^۲\geqslant ۰ \qquad x^۲\leqslant ۱ \qquad -۱\leqslant x\leqslant ۱$$

$$D_f=[-۱ \text{ و } ۱]$$

مثال ۳ : دامنهٔ تعریف تابع f را که به وسیلهٔ $x \overset{f}{\longmapsto} f(x)=\dfrac{x^۲+۱}{x^۲-۲x}$ مشخص شده است تعیین کنید:

جواب: دامنهٔ تعریف آن چنین است:

$$D_f=R-\{۰ \text{ و } ۲\}$$

تذکر: گاهی به‌جای آنکه بگویند دامنهٔ تعریف تابع f مجموعهٔ $]\infty+ \text{ و } a]=D_f$ است می‌گویند تابع f روی $]\infty+ \text{ و } a]=D_f$ معین است.

۱-۴- مشخص کردن یك تابع

هر تابع بادامنهٔ تعریف، و مقدار آن بازاء هریك از اعضاء دامنهٔ تعریفش مشخص می‌شود معمولا تابع را به‌شکلهای مختلف مشخص می‌کنند.

الف- وقتی که عده اعضاء دامنهٔ تعریف کم باشد می‌توان تابع را بوسیله یك جدول تعریف کرد برای این کار عضوهای دامنهٔ تعریف را بریك سطر ومقادیر متناظر تابع را زیر آن می‌نویسیم، یعنی بازاء هر x از دامنهٔ تعریف، مقدار تابع را در x برسطر زیرین می‌نویسیم.

مثلا جدول

x	۵	$\sqrt{۲}$	π	e	۷
f(x) = y		۱	۲	۲	

تابع $f=\{(\sqrt{۲} \text{ و } ۱) \text{ و } (\pi \text{ و } ۲) \text{ و } (e \text{ و } ۲)\}$ را مشخص می‌کند.

ب- طریقهٔ کلّی مشخص کردن تابع اینست که:

اولا: دامنهٔ تعریف تابع را معلوم می‌کنند.

ثانیاً : ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع بازاء هرعضو دامنهٔ تعریفش به دست می‌دهند. (البته باید این ضابطه چنان باشد که بازاء هرعضو دامنهٔ تعریف یك وتنها یك مقدار برای تابع بدست دهد) بنابراین ضابطهٔ تعریف تابع فرمولی است که مقدارتابع را برحسب x به دست می‌دهد، ومعمولاآنرا بصورت $y=f(x)$ نمایش می‌دهند.

مثلا : ضابطهٔ $y=۳x+۲$ و $x\in R$ تابعی در R تعریف می کند و اگر این تابع را f بنامیم مقدار تابع $f(x)=۳x+۲$ بوده و تابع به صورت زیرمشخص می‌گردد.

$$f=\{(x \text{ و } y)|x\in R \text{ و } y=۳x+۲\}$$

گاهی تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$ را به صورت‌زیرهم نمایش‌می‌دهند:

$$x\in R \text{ و } x\xrightarrow{f} f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

ج- بسیاری از توابع هستند که ضابطهٔ آنها با فرمول قابل بیان نیست و ناچار آنها را بوسیله جدول نمایش می‌دهند.

مثلا: اگر {۲ و ۰/۴ و ۱/۵ و ۴/۳}$=A$، تابع f بر A با ضابطهٔ(y جزء صحیح x) به صورت زیر مشخص می‌شود.

x	۴/۳	۱/۵	۰/۴	۲
$f(x)=y$	۴	۱	۰	۲

د- گاهی مقدار یك تابع در سراسر دامنهٔ تعریفش با یك ضابطه مشخص نمی‌شود ناچار باید آنرا با چند ضابطه مشخص نمود (به اینگونه توابع، تابع باچند ضابطه می‌گویند).

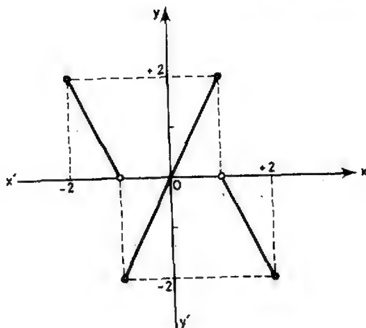
مثلا اگر A دامنهٔ تعریف تابع f دارای دو زیر مجموعهٔ جدا از هم A_1 و A_2 باشد به طوری‌که $A=A_1\cup A_2$ و مقادیر تابع بر A_1 بایك ضابطه وبر A_2 با ضابطهٔ دیگر مشخص شوند آن را به صورت زیر عرضه می‌کنند.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ و } x\in A_1 \\ f_2(x) \text{ و } x\in A_2 \end{cases}$$

مانند تابع f در [۲ و ۲ -]$=A$ که به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} -2x-2 \text{ ، } x\in[-2 \text{ و } -1[\\ 2x \text{ ، } x\in[-1 \text{ و } 1] \\ -2x+2 \text{ ، } x\in]1 \text{ و } 2] \end{cases}$$

که شکل‌آن به صورت زیر است :

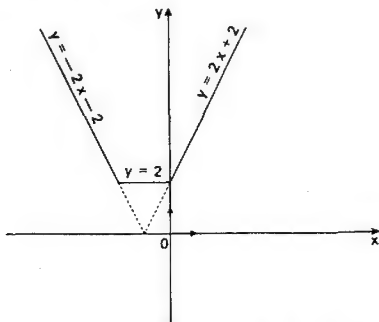


مثال: تابع f بر R باضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ تعـریف شده است . ایـن تابع را به صورت تابع با چند ضابطه بنویسید.

حل: $f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+2)^2}=|x|+|x+2|$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\lvert x\rvert$	$-x$		$-x$	0	x
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$
$f(x)$	$-2x-2$	2	2	2	$2x+2$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & ، \quad x<-2\\ 2 & ، \quad -2\leqslant x\leqslant 0\\ 2x+2 & ، \quad x>0\end{cases}$$



۱ـ۵ـ تابع عددی با متغیر حقیقی یا تابع حقیقی

هر گاه دامنه و برد تابعی زیر مجموعه‌هائی از R یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی، باشندآنگاه آن تابع را یك تابع عددی با متغیر حقیقی یا تابع حقیقی می‌نامند دراین کتاب اغلب سروکارمان با توابع حقیقی‌است، وهرجا عبارت، تابع $y=f(x)$ بکاررفتم ، منظور تابع f به R با ضابطهٔ تعریف $y=f(x)$ می‌باشد.

۱-۶- تابع جزء صحیح

هر عدد حقیقی را می‌توان مجموع یك عدد درست n ویکعدد حقیقی مثبت p که بین صفر ویك می‌باشد فرض‌گرفت (درحالت خاص ممکن است p مساوی صفر باشد).

مثلا: در عدد ۲/۷۵ داریم $n=۲$ و $p=۰/۷۵$

ودرعدد ۲/۳− داریم $n=-۳$ و $p=۰/۷$

و در عدد $۵\frac{۲}{۳}$ داریم $n=۵$ و $p=\frac{۲}{۳}$

بطورکلی برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z ، x=n+P \quad و \quad ۰\leqslant P<۱ \qquad (۱)$$

n، بزرگترین عدد درست نابزرگتر از x، را جزء صحیح x نامیده و آن را با نماد [x] یا E(x) نمایش می‌دهند با توجه به (۱) داریم:

$$\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z \quad P=x-n \quad و \quad ۰\leqslant x-n<۱$$

$$\boxed{\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z \quad n\leqslant x<n+۱ \Longleftrightarrow E(x)=[x]=n}$$

مثال: اگر $x=-۱/۴$ باشد [x] را بدست‌آورید.

حل: چون $-۲\leqslant -۱/۴<-۱$ است طبق تعریف $[-۱/۴]=-۲$ میگردد.

مثال: اگر $۳\leqslant x<۴$ باشد [x] را بدست‌آورید.

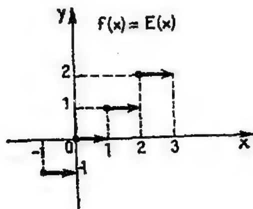
حل: اگر $[x]=n$ بگیریم با توجه به تعریف بالا باید داشته باشیم $n\leqslant x<n+۱$ و چون $x<۴$ است $n<۴$ خواهد بود اما بزرگترین عدد درستی که از چهار کوچکتر باشد $n=۳$ است یعنی $[x]=۳$

از نظر تابعی، تابع حقیقی f از R به Z راکه به صورت $f(x)=[x]$ تعریف شده است تابع جزء صحیح می‌نامند

$$f: R\longrightarrow Z$$

$$x\xrightarrow{f}[x]=n \quad و \quad n\leqslant x<n+۱$$

نمودار این تابع درفاصله]۳ و ۱−] به صورت زیر است.



نتایج بەدست آمده از تعریف عبارتست:

۱- $\forall x\in R \quad E(x)\leqslant x<E(x)+1$

۲- $\forall x\in R \quad 0\leqslant x-E(x)<1$

۳- $\forall x\in R \quad x-1<E(x)\leqslant x$

۴- الف : $x\notin Z \Longrightarrow E(-x)=-E(x)-1$

ب : $x\in Z\Longrightarrow E(-x)=-E(x)$

در نتیجه ج : $E(x)+E(-x)=\begin{cases} 0 & \text{اگر } x\in Z \\ -1 & \text{اگر } x\notin Z \end{cases}$

۵- اگر n و m دو عدد صحیح باشند داریم:

$$n\leqslant mx<n+1 \Longleftrightarrow E(mx)=n$$

۶- برای هرعدد حقیقی x و هر عدد درست n داریم:

$$E(x+n)=E(x)+n$$

۱-۷- تساوی دو تابع

شرط لازم وکافی برای آنکه دو تابع f و g با هم مساوی باشند آن است که:

اولا: دامنه‌های تعریف دو تابع برابرباشند. یعنی: $D_f=D_g$

ثانیاً: بازاء هر x از دامنهٔ تعریف‌مشترك مقدار دوتابع برابرباشند. یعنی: $f(x)=g(x)$.

مثلا دوتابع حقیقی f و g که به‌صورت:

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1} \qquad g(x)=x^2-1$$

تعریف شده‌اند با هم برابرند ولی توابع حقیقی h و k که به صورت:

$$h(x)=\frac{x^2-x}{x} \text{ و } k(x)=x-1$$

تعریف شده‌اند باهم مساوی نیستند زیرا صفر در دامنهٔ k قرار دارد در حالی کـه متعلق به دامنهٔ h نیست. البته اگر دامنهٔ k را همه عددهای حقیقی مخالـف صفر فرض کنیـم، آن وقت $h=k$.

تمرین

۱- رابطه f در R باگزاره‌نمای $y=x^2-3x+2$ تعریف شده است. آیا این رابطه تابع است؟

۲ـ رابطه f در R باگزاره نمای $x^۲ - y^۲ = ۱$ تعریف شده است. آیـا این رابطه تابع است؟

۳ـ آیا رابطه زیر یك تابع است؟ با چه تغییراتی می‌توان آنرا به‌یك تابع تبدیل نمود.

$$x \in [۲ و -۲] \text{ و } x \xrightarrow{f} f(x) = \frac{۱}{۲}(x \pm \sqrt{۱۲ - ۳x^۲})$$

۴ـ آیا رابطهٔ زیر یك‌تابع است ؟

$$x \in R \text{ و } x \xrightarrow{f} f(x) = \sqrt{۱ - x} + \sqrt{x - ۲}$$

۵ـ تساوی $y^۲ - ۲xy + ۲x^۲ - ۱ = ۰$ دستورهائی برای دو تابع به دست می‌دهد. آنها را از هم جدا کنید و دامنهٔ تعریف وبرد هریك را معین کنید.

۶ـ تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x) = |x| + |x + ۱| + |x - ۱|$ تعریف شده این تابع را به صورت تابع با چند ضابطه بنویسید.سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۷ـ دامنهٔ تعریف هریك از توابع زیر را معین کنید.

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{x + ۲}{x^۳ - x}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - x - ۲}}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{|x - ۱|}{\sqrt{(x - ۱)^۲}}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \frac{x}{۱ - [x]}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۳x + ۲} - \sqrt{x^۲ + ۲x - ۳}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{(x + ۲)x} + \sqrt{x(x - ۱)}$$

$$x \in R \text{ و } x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{\frac{۱ - x}{x + ۲}}$$

۸– مجموعهٔ $A=\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\right\}$ و تابعهای f و g بر A با ضابطه‌های

$f(x)=\sin x\cos x$ و $g(x)=x(x^2-\frac{\pi^2}{4})(x-\pi)$ مفروضند آیا دو تابع f و g مساویند؟

۹– توابع f و g بر R با ضابطه‌های زیر مفروضند تعیین کنید کدامیك از این دو تابع با هم برابرند.

(۱) $f(x)=\frac{x}{x}$ $\qquad g(x)=1$

(۲) $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-1}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x(x-1)}$

(۳) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ $\qquad g(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

(۴) $f(x)=[\frac{x^2}{x^2+1}]$ و $g(x)=0$

۱۰– نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف : $f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{اگر } x\neq \text{عدد درست} \\ 0 & \text{اگر } x= \text{عدد درست} \end{cases}$

ب : $f(x)=\begin{cases} -x+2 & \text{اگر } x<0 \\ x^2-2x & \text{اگر } x\geqslant 0 \end{cases}$

۱۱– تابع f از R به Z باضابطهٔ $f(x)=2[x]-1$ تعریف شده است نمودار آنرا در فاصله]۲ و ۲ –[رسم کنید.

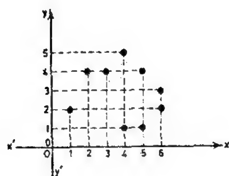
۱۲– تابع f در R با ضابطهٔ $f(x)=2x-[x]$ تعریف شده است نمودار هندسی آنرا در فاصله]۲ و ۲ –[رسم کنید.

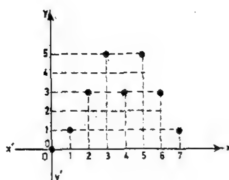
۱۳– تابع f از R به Z باضابطهٔ $f(x)=[x+2]$ را درفاصله]۲ و ۲ –[رسم کنید.

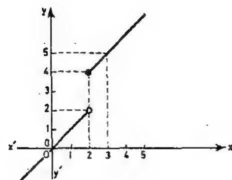
۱۴– تابع f از R به Z با ضابطهٔ $f(x)=[2x]$ را درفاصله]۱ و ۱ –[رسم کنید.

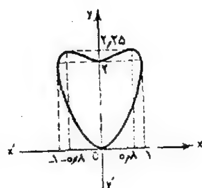
۱۵– تابع f از R به R باضابطه $f(x)=x+[x]$ را درفاصله]۲ و ۱ –[رسم کنید.

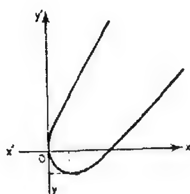
۱۶– تعیین کنید کدامیك از نمودارهای صفحهٔ بعد نمودار یك تابع وکدامیك نمودار یك رابطه است.

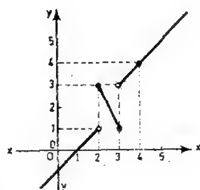

y
5
4
3
2
1
0
x'
x
O
1 2 3 4 5 6
y'

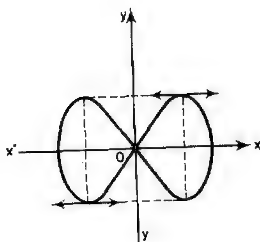

y
5
4
3
2
1
0
x'
x
O
1 2 3 4 5 6 7
y'

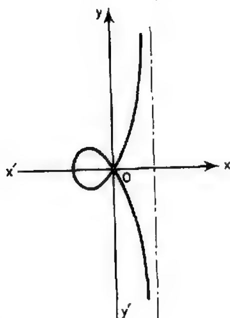

y
5
4
3
2
1
0
x'
x
O
1 2 3 4 5
y'

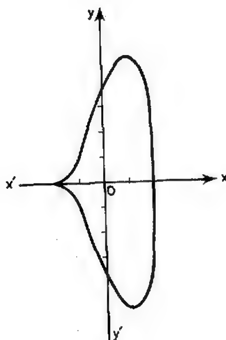

y
۲٫۲۵
۲
x'
x
۱- ۰٫۸- O ۰٫۸ ۱
y'


y'
x'
x
O
y


y
5
4
3
2
1
0
x
x
O
1 2 3 4 5
y


y
x'
x
O
y


y
x'
x
O
y'


y
x'
x
O
y'

۱-۸- چند نوع تابع

I- **تابع یک به یک** ــ فرض کنید که f تابعی از A به B باشد. f را یک به یک گوییم. اگر:

$$\forall x_1 \text{ و } x_2 \in D_f \quad \text{و} \quad f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$

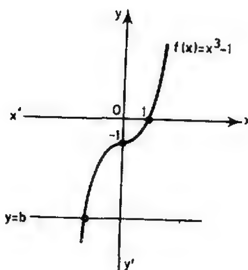
مثلا تابع f در R که باضابطهٔ $f(x)=x^3-1$ تعریف شده است. یک به یک است زیرا:

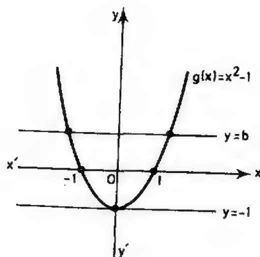
$$\forall x_1 \text{ و } x_2 \in D_f \quad \text{و} \quad f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1^3-1=x_2^3-1 \Longrightarrow x_1=x_2$$

ولی تابع g در R که با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ تعریف شده است یک به یک نیست زیرا:

$$\forall x_1 \text{ و } x_2 \in D_g \text{ و } g(x_1)=g(x_2) \Longrightarrow x_1^2-1=x_2^2-1 \Longrightarrow x_1=\pm x_2 \not\Longrightarrow x_1=x_2$$

از روی نمودار تابع می‌توان یک به یک بودن آن را بررسی کرد بدین طریق که اگر خط افقی بمعادله $y=b\in R_f$ نمودار تابع را فقط دریک نقطه قطع کند تابع یک به یک است در غیر این صورت یک‌به‌یک نیست.





دربالا، نمودار تابع f نشان می‌دهد که تابع f یک به یک است و نمودار تابع g نشان می‌دهد که تابع g یک به یک نیست.

تابع یک به یک را می‌توان به صورت:

$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$ $\quad \forall x_1, x_2 \in D_f$ نیز تعریف کرد. (چرا؟)

II- **تابع پوششی** ــ تابع f از A به B راپوششی گویند هرگاه $R_f=B$ باشد. به‌عبارت دیگر به ازای هر $y\in B$ عضوی مانند $x\in D_f$ وجود داشته باشد به قسمی که $y=f(x)$.

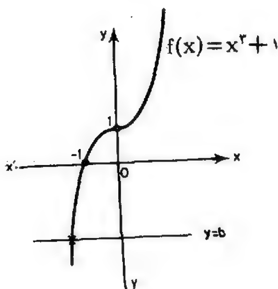
مثلا تابع f از R درR با ضابطهٔ $y=x^3+1$ پوششی است. زیرا دامنهٔ تعریف $D_f=R$ و برد تابع $R_f=R$ بوده و داریم: $x=\sqrt[3]{y-1}$ که بازاء هرyی متعلق به‌برد تابع‌یعنی $y\in R$

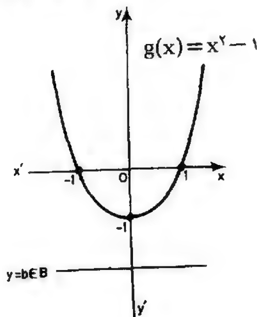
لااقل یک xی متعلق به‌دامنه تعریف تابع یعنی $x\in R$ به دست می‌آید که $y=x^3+1$ باشد.

ولی تابع g از R به R با ضابطه $g(x)=x^2-1$ پوششی نیست. زیرا دامنهٔ تعریف تابع $D_g=R$ و برد تابع مجموعهٔ $R_g=[-1, +\infty[$ است که با مجموعهٔ اعداد حقیقی R برابر نیست و از طرفی $x=\pm\sqrt{y+1}$ است. و به ازاء $y=-2\in R$ ، xی متعلق به دامنهٔ تعریف پیدا نمی‌شود که در $y=x^2-1$ صدق کند. چنانچه تابع f از A به B پوششی باشد. از هرنقطه بعرض $y=b\in B$ خط افقی رسم کنیم این‌خط نمودار تابع را لااقل در یك نقطه قطع می‌کند.

$$f: R\longmapsto R \qquad g: R\longmapsto R$$

$$f: x\longmapsto y=x^3+1 \qquad g: x\longmapsto y=x^2-1$$





نمودار تابع f نشان می‌دهد که تابع f پوششی است و نمودار تابع g نشان می‌دهد که تابع g پوششی نیست. ولی تابع g از R به $[-1, +\infty[$ با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ پوششی است زیرا برد تابع $R_g=[-1, +\infty[$ است.

III– تابع یکنوا ـ اگر A زیرمجموعهٔ R و f تابعی از A به R باشد گوئیم.

الف– تابع f روی A اکیداً صعودی است اگر:

$$\forall x_1, x_2\in A \quad \text{و} \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

ب– تابع f روی A اکیداً نزولی است اگر:

$$\forall x_1, x_2\in A \quad \text{و} \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

ج– تابع f روی A اکیداً یکنواست هر گاه: اکیداً صعودی یااکیداً نزولی باشد.

مثلاً: تابع f در R باضابطهٔ $f(x)=x^3$ اکیداً صعودی است .

زیرا:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \qquad x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^3 < x_2^3$$

درنتیجه می‌توان گفت تابع f در R اکیداً یکنواست.

د ــ تابع f روی A صعودی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in A \quad و \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

هـ ــ تابع f روی A نزولی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in A \quad و \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

و ــ تابع f روی A یکنواست هرگاه: f روی A صعودی یا نزولی باشد.

مثلاً : تابع g در R با ضابطهٔ

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ -x^2 + 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست. زیرا هرچه باشد x_1 و x_2 کوچکتر از صفر یا بزرگتر از یك داریم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

و اما بازاء $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ داریم

$$x_1 = 0 < x_2 = 1 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$$

پس تابع g روی D_g نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست درنتیجه می‌توان گفت تابع g روی D_g یکنواست ولی اکیداً یکنوا نیست.برای تعیین فواصل یکنوائی تابع ازقضیه زیر استفاده می کنند.

قضیهــ تابع f درهر فاصله‌ای که مشتق آن یعنی f' مثبت باشد (مگر احیاناً درتعداد با پایانی نقطه صفر شود) صعودی، و درهر فاصله‌ای‌که مشتق آن منفی باشد (مگردرتعداد با پایانی نقطه صفرشود) نزولی و در هرفاصله‌ای که مشتق آن برابرصفرباشد، مقداری ثابت است.

قضیه ــ اگر تابع f اکیداً یکنوا باشد آنگاه f یك به یك است.

IV ــ **تابع ثابت** ــ فرض کنید که c عدد حقیقی و ثابت باشد تابع f از R به R را که به صورت $f(x) = c$ تعریف شده است، تابع ثابت می‌نامند. واضح است‌که f نه یك به یك است و نه پوششی، نمودار این تابع خطی موازی محور x هاست.

V ـ **تابع همانی** ـ تابعی‌مانند f از A به A را که برای هر $x \in A$ به‌صورت $f(x)=x$ تعریف شده است، تابع همانی روی A می‌نامند مثلا تابع

$$f=\{(\text{۰ و ۰})\text{ و }(\text{۱ و ۱})\text{ و }(\text{۲ و ۲})\}$$

یك تابع همانی روی مجموعهٔ $A=\{\text{۰ و ۱ و ۲}\}$ است.

معمولا تابع همانی روی مجموعه‌ای مانند A را به I_A نشان می‌دهند. تابع همانی‌روی R تابعی است مانند f از R به R که برای هر $x \in R$ بـه صورت $f(x)=x$ تعریف شده است نمودار این تابع، نیمساز ناحیه اول وسوم است.

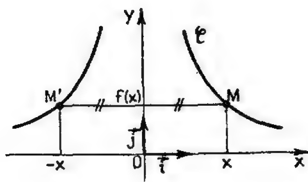
VI ـ **تابع زوج و تابع فرد** ـ الف ـ تابع fرا زوج‌گویند، هرگاه:

اولا: برای هر $x \in D_f$ داشته‌باشیم: $-x \in D_f$

ثانیاً: برای هر $x \in D_f$ داشته‌باشیم: $f(-x)=f(x)$.

تابعهائی که بوسیله‌دستورهای $y=x^{۲}-۱$ و $y=\cos x$ و $y=x\sin x$ تعریف شده‌اند نمونه‌هائی ازتابع زوج هستند.

نمودار هندسی تابع‌زوج نسبت‌به‌محور yها تقارن‌دارد.



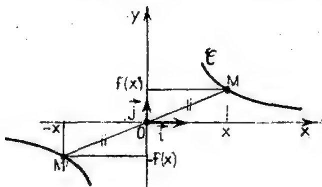
ب ـ تابع f را فردگویند هرگاه:

اولا: برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم : $-x \in D_f$

ثانیاً: برای‌هر $x \in D_f$ داشته‌باشیم: $f(x)=-f(-x)$

تابعهای $y=x^{۳}-x$ و $y=x+\sin x$ و $y=\dfrac{x}{x^{۲}+۱}$، نمونه‌هائی‌ازتابعهای فردهستند.

نمودار هندسی تابع فرد نسبت به مبداء مختصات تقارن دارد.



مورد استفاده: معمولاً در رسم نمودار یك تابع، از زوج وفرد بودن تابع وخاصیت تقارن استفاده نموده ابتدا قسمتی از نمودار تابع را می‌کشند وبعد قرینه آن را نسبت به محور yها یا مبداء مختصات رسم می‌کنند.

VII ـ تابع متناوب ـ تابع f در R با دامنهٔ تعریف D_f را یك تابع متناوب گویند، وقتی که کوچکترین عدد مثبتی مانند $T \neq 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که:

اولاً: برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $(x+T) \in D_f$

ثانیاً: $\forall x \in D_f$ ، $f(x+T) = f(x)$

مثال ۱ـ ثابت کنید دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sin 2x$ برابر $T = \pi$ است.

حل: $D_f = R$ و اگر $x \in D_f$ آنگاه $(x+\pi) \in D_f$ است. و داریم:

$$f(x+\pi) = \sin 2(x+\pi) = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x = f(x)$$

مثال ۲ـ ثابت کنید دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = x - E(x)$ برابر یك است.

حل: اولاً: $D_f = R$ بوده و اگر $x \in D_f$ باشد آنگاه $(x+1) \in D_f$ است.

ثانیاً:

$$f(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - E(x) - 1 = x - E(x) = f(x)$$

مثال ۳ـ تابع با ضابطهٔ $f(x) = \cos 3x$ متناوب است دورهٔ تناوب آنرا بیابید.

حل: اگر T دورهٔ تناوب تابع باشد باید داشته باشیم:

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\cos 3(x+T) = \cos 3x$$

$$3x + 3T = 2k\pi \pm 3x \Longrightarrow T = \frac{2k\pi}{3} \text{ ، } k = 1 \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

بطور کلی دورهٔ تناوب‌تابع $f(x) = \sin ax$ و $f(x) = \cos ax$ ، $T = \frac{2\pi}{a}$ و دورهٔ تناوب تابع $f(x) = tg\, ax$ و $f(x) = cotg\, ax$ ، $T = \frac{\pi}{a}$ است.

مثال ۴- دورهٔ تناوب تابع $y = \sin 4x + \cos 6x$ را تعیین کنید.

T_1 دورهٔ تناوب $\sin 4x$ عبارتست از : $T_1 = 2\pi : 4 = \frac{\pi}{2}$

T_2 دورهٔ تناوب $\cos 6x$ عبارتست از: $T_2 = 2\pi : 6 = \frac{\pi}{3}$

اگر T_1 و T_2 را متحدالمخرج کنیم می‌شود $T_1 = \frac{3\pi}{6}$ و $T_2 = \frac{2\pi}{6}$ و چون کوچکترین مضرب مشترك ۳ و ۲ برابر ۶ است وداشتیم $T_1 = 3 \times \frac{\pi}{6}$ و $T_2 = 2 \times \frac{\pi}{6}$ پس $T = 6 \times \frac{\pi}{6}$ یعنی دورهٔ تناوب تابع فوق $T = \pi$ می‌باشد.

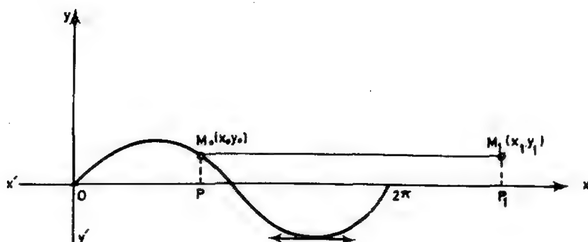
مثال ۵- دورهٔ تناوب تابع $y = \sin\frac{2}{3}x + \cos\frac{1}{6}x$ را تعیین کنید . دورهٔ تناوب تابع $\cos\frac{1}{6}x$ برابر است با: $T_1 = 2\pi : \frac{1}{6} = 12\pi$ و دورهٔ تناوب تابع $\sin\frac{2}{3}x$ برابراست با : $T_2 = 2\pi : \frac{2}{3} = 3\pi$ چون کوچکترین مضرب مشترك بین ۱۲ و ۳ عبارت است از ۱۲ پس $T = 12 \times \pi = 12\pi$

مورد استفاده : برای رسم منحنی (C) نمایش تابع مثلثاتی متناوب $y = f(x)$ ابتدا منحنی (C_0) نمایش مذکور رابوسیله جدول تغییرات آن‌در یکی ازفاصله‌های تناوب مثلا $(a , a+T)$ رسم نموده سپس منحنی‌حاصل را به‌اندازه بردار $\vec{V}$ موازی محورxها که اندازه جبری آن روی محورxها kT (k عددی درست است) می‌باشد انتقال می‌دهیم هرگاه به k اعداد درست بدهیم و عمل را ادامه دهیم منحنی (C) نمایش تابع رسم می‌شود.

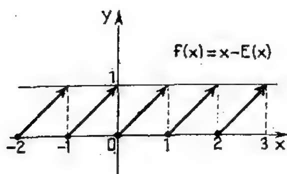
مثلا اگر (C_0) نمایش تابع $y = \sin x$ در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ (شکل بعد) و M_0 نقطه‌ای از آن به مختصات $(x_0 , \sin x_0)$ باشد هرگاه نقطهٔ M_0 رابه‌اندازهٔ بردار $\vec{V}$ موازی محور $x'x$ که اندازهٔ جبری آن $2k\pi$ (درشکل اندازهٔ جبری بردار $2k\pi$ را 2π اختیار کرده‌ایم) می‌باشد انتقال دهیم نقطهٔ $M_1(x_1 , y_1)$ بدست می‌آید.

داریم:

$$x_1 = x_0 + k \cdot 2\pi$$
$$y_1 = y_0 = \sin x_0 = \sin(x_0 + 2k\pi) = \sin x_1$$



و چون مختصات $M_۱$ در معادلهٔ $y = \sin x$ صدق می‌کند پس $M_۱$ متعلق به نمودار است. همچنین تابع $f(x) = x - E(x)$ یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۱$ است زیرا $E(x + ۱) = E(x) + ۱$ از این رو کافی است که آن را در فاصله]۱ و ۰] بررسی کنیم. برای]۱ و ۰]$x\in$ داریم $f(x) = x$ و از آنجا نمودارنمایش تابع مطابق شکل زیراست.



تمرین

۱ــ دورهٔ تناوب هریك از توابع زیر را بدست آورید.

الف : $f(x) = \sin \frac{۲}{۳}x + \cos \frac{۳}{۲}x$

ب : $f(x) = tg\frac{۱}{۳}x + cotg\,\frac{۱}{۴}x$

ج : $f(x) = \sin ۲x + \cos\frac{x}{۳}$

د : $f(x) = ۲\cos ۳\pi(x + \frac{۱}{۶})$

ه : $f(x) = \sin(۲x + \frac{\pi}{۴})$

۲ــ تعیین کنید کدامیك از توابع زیر زوج و کدام یك فردند.

الف: $y = ۱ + x^۲ + \sqrt{۱ - x^۲}$

ب : $y = x^۴ - ۲x^۲ + ۱$

ج : $y = x^۳ - ۳x$

د : $y = \sqrt{۳ - x^۲}$

ه : $y = \frac{۲x}{۱ + x^۲}$

و : $y = \frac{x}{[-x] + [x]}$

ز : $y = \frac{x}{۱ + |x|}$

ح : $y = \frac{x^۲ + ۳}{x^۲ + |x|}$

۳ــ تابع $f: x \longmapsto (-۱)^{[x]}(x - [x])$ که در آن $[x]$ قسمت صحیح x را نمایش می‌دهد مفروض است : ثابت کنید دوره تناوب تابع $T = ۲$ است .

۱-۹- چند عمل روی توابع حقیقی

I- مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب ، خارج قسمت دوتابع فرض کنید f و g توابعی‌حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g باشند به‌کمك آنها می‌توان توابع‌جدیدی که با :

$$f+g \text{ و } f-g \text{ و } f.g \text{ و } \frac{f}{g}$$

نشان داده میشوند ساخت که‌آنها را به ترتیب مجموع ، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت f و g می‌نامند.دامنهٔ‌توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ مقطع دامنه‌های f و g یعنی $D_f \cap D_g$ است

ودامنه $\frac{f}{g}$ عبارت است‌از:

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_g | \ g(x) = 0\}$$

این توابع توسط دستورهای زیر تعریف میشوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\}$$

مثال: فرض‌کنید $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ باشد . توابع $f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بسازید.

حل:

$$D_f = x - 1 \geqslant 0 = [1 \text{ و } +\infty[$$

$$D_g = 2 - x \geqslant 0 =]-\infty \text{ و } 2]$$

بنابراین دامنهٔ تعریف $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ عبارتست از:

$$D_f \cap D_g = [1 \text{ و } +\infty[\ \cap \ ]-\infty \text{ و } 2] = [1 \text{ و } 2]$$

ودامنه تعریف $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = [1 \text{ و } 2] - \{2\} = [1 \text{ و } 2[$$

در نتیجه:

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x-1} \pm \sqrt{2-x} \qquad x \in [1 \text{ و } 2]$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{(x-1)(2-x)} \qquad x \in [1 \text{ و } 2]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} \qquad x \in [1 \text{ و } 2[$$

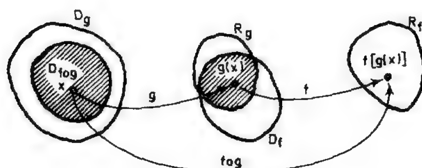
II- ترکیب دو تابع فرض کنید f و g توابعی حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g و بردهای R_f و R_g باشند. منظوراز ترکیب f و g که آن را با fog (بخوانید f اُ g یا f دایـره g) نشان میدهند تابعی است که‌دامنه تعریف آن:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

و بصورت زیر تعریف میشود:

$$(fog)(x)=f[g(x)] \quad و \quad x\in D_{fog}$$

تابع fog را یك تابع مرکب یا **تابع تابع** نیز می‌نامند شکل زیر ترکیب دو تابع f و g را در حالت کلی توصیف می کند:



مثال ۱: توابع f و g در R به‌صورت $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=2-x$ تعریف شده‌اند. بدون محاسبه fog و gof دامنهٔ تعریف آنها را بدست‌آورید سپس fog و gof رامحاسبه کنید.

حل: داریم:

$$D_f=x\geqslant -1 \quad D_g=R$$
$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

بنا بر این:

$$D_{gof}=\{x\geqslant -1 \mid \sqrt{x+1}\in R\}=[-1 \text{ و } +\infty)$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$
$$D_{fog}=\{x\in R \mid 2-x\geqslant -1\}=(-\infty \text{ و } 3]$$

وهمچنین:

$$gof(x)=g[f(x)]=2-f(x)=2-\sqrt{x+1} \qquad \forall x\in[-1 \text{ و } +\infty)$$
$$fog(x)=f[g(x)]=\sqrt{g(x)+1}=\sqrt{(2-x)+1}=\sqrt{3-x}$$
$$\forall x\in(-\infty \text{ و } 3]$$

توجه: از این‌مثال دیده میشود که درحالت‌کلی لازم نیست داشته باشیم: $fog = gof$.
در این مثال نه تنها دامنه‌های fog و gof برابر نیستند، بلکه حتی مقادیر fog و gof روی مقطع دامنه‌هایشان یعنی [۳ و ۱ −] نیز مساوی نیستند. این نشان میدهد که عمل ترکیب‌دو تابع روی مجموعهٔ توابع یك‌عمل جابجائی نیست.

مثال۲: تابعهای $f(x) = ۳x - ۱$ و $g(x) = ۲x + ۱$ و $h(x) = ۵x + ۲$ داده‌شده‌اند.
مطلوب است تعیین‌تابع‌های مرکب: $ho(gof)$ و $(hog)of$ آیا این‌دوتابع مساوی‌اند؟
حل_ دامنه‌های همهٔ توابع مجموعهٔ R است و داریم:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = ۲(۳x - ۱) + ۱ = ۶x - ۱ = z(x)$$
$$(ho(gof))(x) = h[z(x)] = ۵(۶x - ۱) + ۲ = ۳۰x - ۳$$
$$(hog)(x) = h[g(x)] = ۵(۲x + ۱) + ۲ = ۱۰x + ۷ = z_۱(x)$$
$$((hog)of)(x) = (z_۱of)(x) = z_۱[f(x)] = ۱۰(۳x - ۱) + ۷ = ۳۰x - ۳$$

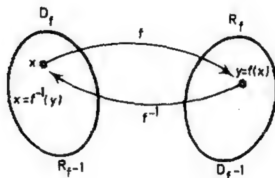
پس $ho(gof)$ و $(hog)of$ با یکدیگر مساوی‌اند.

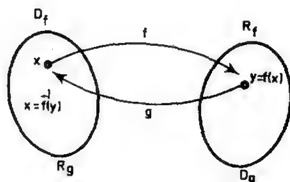
۱-۱۰-تابع معکوس

اگر تابع f با دامنهٔ تعریف D_f و برد R_fیك به یك وپوششی باشد.
اولا: بازاء هر $x \in D_f$ یك و تنها یك $y \in R_f$ وجود دارد بقسمی که $(y \text{ و } x) \in f$ است.
ثانیاً: بازاء هر $y \in R_f$ یك و تنها یك $x \in D_f$ وجود دارد بقسمی که $(y \text{ و } x) \in f$ است.
حال اگر رابطهٔ:

$$g = \{(x \text{ و } y) \mid (y \text{ و } x) \in f\} = R_f \times D_f$$

را درنظر بگیریم این رابطه بنا برقسمت ثانیاً تابع‌g را تعریف می‌کند که دامنهٔ تعریف‌آن برد f و برد آن دامنهٔ تعریف f است این تابع g را تابع معکوس f می‌خوانند و آنرا به $f^{-۱}$ نمایش می‌دهند. بنابراین:





$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-۱}(y)$$

توجه:

۱ـ اگر f^{-1} معکوس f باشد f هم معکوس f^{-1} خواهد بود.

۲ـ معکوس تابعی که یك به‌یك نباشد تعریف نشده است.

قضیه اساسیـ یك تابع پیوسته و اکیداً یکنوا روی [a و b] معکوس‌پذیر است.

(این قضیه را بدون‌اثبات می‌پذیریم.)

بنابراین طبق قضیه فوق، اگر تابع f در فاصله [a و b] پیوسته ویکنوا باشد (یعنی دراین فاصله همواره صعودی یا همواره نزولی باشد f تابع معکوس دارد.)

برای بدست‌آوردن دستور f^{-1} (معکوس تابع f)، ازدستور $y=f(x)$ مقدار x را برحسب y تعیین می‌کنیم تا $x=f^{-1}(y)$ به دست‌آید در تابع اخیر y متغیر مستقل و x متغیر تابع است وچون معمولاً x را متغیر مستقل و y را متغیر تابع می‌گیرند جای y و x را عوض می‌کنیم تا $y=f^{-1}(x)$ به‌دست آید.

مثال۱ـ تابع $y=f(x)=2x-4$ مفروض است. هرگاه x در فاصله [۳ و ۰] تغییر کند:

الف: تابع معکوس تابع f را تعیین و دامنهٔ تعریف و برد آنرا بدست آورید.

ب: نمودار دوتابع را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل: چون $y'=f'(x)=2>0$ مثبت است f تابعی است صعودی وپیوسته، پس معکوس دارد.

و چون، $D_f=[0 \text{ و } 3]$

پس داریم: $R_f=[f(0) \text{ و } f(3)]=[-4 \text{ و } 2]$

از $y=2x+4$ ، x را برحسب y حساب می‌کنیم.

(y متغیر مستقل و x متغیر تابع) $x=\frac{y}{2}+2$

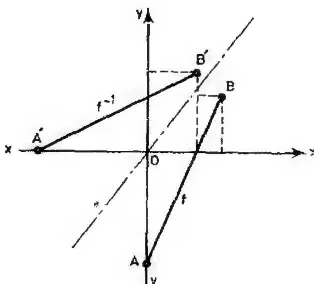
و با تعویض x و y، $y=f^{-1}(x)=\frac{x}{2}+2$

معکوس تابع f بدست می‌آید. دامنه و برد f^{-1} برابر است با:

$$D_{f^{-1}}=R_f=[-4 \text{ و } 2]$$

$$R_{f^{-1}}=D_f=[0 \text{ و } 3]$$

در نمودار زیر دونقطه (۲ و ۳) B و (۴− و ۰) A از خط اول و دو نقطه متناظر آنها (۳ و ۲)′B و (۰ و ۴−)′A از خط دوم اختیار شده‌اند.

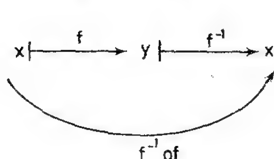


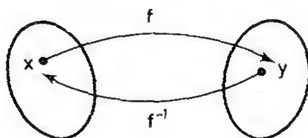
I- خواص تابع معکوس- الف: f^{-1} یکنوا است. یعنی اگر f صعودی باشد f^{-1} هم صعودی است و اگر f نزولی باشد f^{-1} هم نزولی است. بطور کلی جهت تغییرات f^{-1} همان جهت تغییرات f است.

ب: f^{-1} پیوسته است.

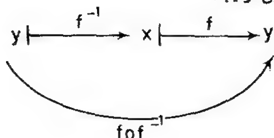
ج: ترکیب دو تابع f و f^{-1} یك تابع همانی است:

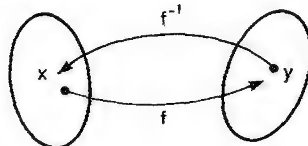
با توجه به طرح زیر داریم: $f^{-1}of(x) = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(y) = x = I_{[a\ ,\ b]}$





($I_{[a\ ,\ b]}$ تابع همانی فاصله [a و b] است) و بهمین ترتیب:





$$fof^{-1}(y) = f[f^{-1}(y)] = f(x) = y = I_{[f(a)\ ,\ f(b)]}$$

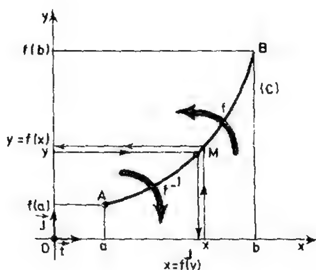
($I_{[f(a)\ ,\ f(b)]}$ تابع همانی فاصله [f(a) و f(b)] است)

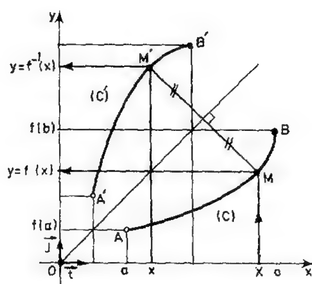
II- نمودار تابع معکوس - اگر (C) منحنی نمایش تابع حقیقی f در دستگاه محورهای مختصات متعامد باشد. بنابرهم ارزی : $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

منحنی (C) با تعویض نقش x و y (y متغیر و x تابع آن) نمودار هندسی تابع f^{-1} نیز هست برای آنکه بطرز نمایش معمولی برگردیم کافی است، x و y را بحالت اول برگردانیم طوری

که در f^{-1}، x متغیر و y نمایش مقادیری باشد که این تابع اختیار می‌کند.

در این‌صورت (C') نمایش تابع $y=f^{-1}(x)$ قرینه (C) نسبت به نیمساز زوایای ربع اول وسوم است. زیرا نقاط $M(x$ و $y)$ و $M'(y$ و $x)$ نسبت به نیمساز زوایای ربع اول وسوم قرینه‌اند.

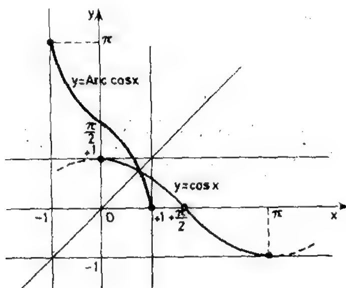




مثلا: تابع $y = \cos x$ روی R پیوسته و روی $[\pi$ و $0]$ اکیداً نزولی‌است. بنابراین دارای یك تابع معکوس می‌باشد که به $y = \mathrm{Arccos}x$ نشان داده می‌شود.

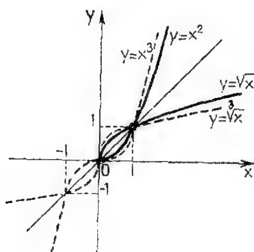
$$\begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0 \text{ و } \pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{Arccos}y \\ y \in [-1 \text{ و } 1] \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y = \mathrm{Arccos}x \\ x \in [-1 \text{ و } +1] \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع $y = \mathrm{Arccos}x$ و $x \in [-1$ و $+1]$ قرینه نمایش تابع $y = \cos x$ و $x \in [0$ و $\pi]$ نسبت به‌نیمساز ربع اول است.



منحنی‌های نمایش تابع‌های $y=\sqrt[n]{x}$

منحنی نمایش تابع‌های (ریشه n ام) همان قرینه های منحنی‌های مربوط به توابع توان $y=x^n$ نسبت به‌نیمساز زاویه ربع اول می‌باشند. درشکل زیرمنحنی‌نمایش $y=\sqrt{x}$ و $y=\sqrt[3]{x}$ نشان‌داده شده‌است.



توجه: بعضی ازتوابع هستندکه معکوس‌پذیرند اما ضابطه تابع معکوس‌آنها را نمی‌توان بدست آورد. ولی با استفاده از این خاصیت می‌توان نمودار تابع معکوس آنها را رسم‌نمود.

مثال ۱: تابع f در R باضابطه $f(x)=x^3+x+1$ مفروض است. بدون به‌دست‌آوردن ضابطه تابع معکوس، نمودار هندسی تابع معکوس آن رارسم کنید.

حل: دامنه تعریف تابع f مجموعه اعداد حقیقی R است وچون $f'(x)=3x^2+1>0$ همواره مثبت و تابع f هم پیوسته است تابع f در دامنه‌تعریفش یکنوا بوده و معکوس‌پذیر است، ونمودار تابع معکوس قرینه نمودار تابع f نسبت به‌نیمساز ربع اول است.

$f(x)=x^3+x+1$ $\qquad$ $f'(x)=3x^2+1>0$

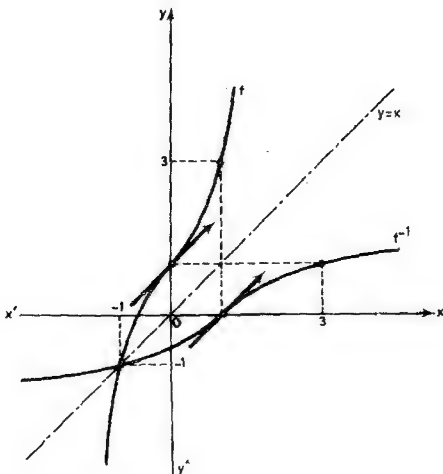
$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f(0)=1$ $\qquad$ $f'(0)=1$ و $f''(0)=0$

$f(1)=3$ $\qquad$ $f'(3)=4$

$f(-1)=-1$ $\qquad$ $f'(-1)=4$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y	$-\infty$	↗	-1	↗	1	↗	3	↗	$+\infty$



تمرین

۱ـ فرض کنید $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=\frac{1}{x+1}$ باشد، fog و gof را تعیین و آنها را با هم مقایسه کنید.

۲ـ توابع زیر مفروض‌اند:

$$f(x)=\frac{2x}{x+1} \text{ و } g(x)=x+2 \text{ و } h(x)=4x-1$$

مطلوبست تعیین تابعهای مرکب $z_1=[(gof)oh](x)$ و $z_2=[go(foh)](x)$ و تحقیق اینکه $z_1=z_2$ است.

۳ـ تابعهای f و g در R با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ و $g(x)=\frac{3}{x+4}$ تعریف شده‌اند.

الف ـ دامنه تعریف f و g و fog و gof را بیابید.

ب ـ gof و fog را محاسبه کنید.

۴ـ تابعهای $f(x)=4x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ مفروضند تابعهای $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بسازید و دامنه تعریف‌هریك را بیابید.

۵ـ تابع $f(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$ با دامنه $D_f=[2 , +\infty[$ و $g(x)=\frac{x^2}{2x-2}$ مفروض‌اند نشان دهید $gof(x)=x$ می‌باشد.

۶ـ تابع معکوس تابع f با ضابطه $a\neq 0$ و $f(x)=ax+b$ را معین‌کنید.

۷ـ تابعهای f و g در R با ضابطه‌های $f(x)=2x+3$ و $g(x)=3x-5$ مفروضند.

اولا: f^{-1} و g^{-1} و $(gof)^{-1}$ را تعیین نمائید.

ثانیاً: نشان دهیدکه $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ است.

ثالثاً: $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$.

۸ـ نشان دهیدکه تابع f باضابطهٔ $f(x)=2+\sqrt[3]{x}$ روی R معکوس‌پذیر است ضابطهٔ تابع معکوس آنرا بیابید.

۹ـ نشان دهیدتابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ در فاصله $[0 , 1]$ معکوس پذیر است. ضابطهٔ تابع معکوس آنرابیابید.

۱۰ـ معکوس پذیری هریك از توابع زیر را بررسی، سپس ضابطهٔ تابع معکوس‌آنها را بیابید.

الف : $x\in[0 , 1]$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=x^4-2x^2$

ب : $x\in[1 , +\infty[$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=|x-1|$

ج : $x\in[1 , +\infty[$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=x^2-2x$

د : $x\in[0 , +\infty[$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=3x+|x|$

۱۱ـ دامنهٔ تعریف وبرد تابع $y\geqslant 0$ و $x\geqslant 0$ ، $4x^2+y^2=16$ رابدست آورده وتابع معکوس آنرا تعیین کنید.

۱۲ـ تابع $x>1$ و $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ مفروض است f^{-1} را تعیین و سپس $f^{-1}of$ و fof^{-1} را باهم مقایسه کنید.

فصل دوم

حد

۲-۱- مقدمه

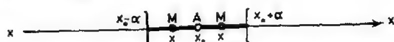
برای تعریف حد تابع درحالت کلی به‌سه تعریف زیرنیاز داریم:

الف- می‌گوئیم متغیر x به سمت x_0 میل می کند ومی‌نویسیم: $x\to x_0$، در صورتیکه‌فاصلهٔ نقطهٔ x تا نقطهٔ x_0 یعنی $|x-x_0|$ مثبت بوده و از هرعدد مثبت کوچك α (هراندازه کوچك که بخواهیم) کوچکتر شود.

$$x\to x_0 \quad \text{یعنی} \quad 0<|x-x_0|<\alpha$$

$$x\to x_0 \quad \text{یعنی} \quad (x_0-\alpha<x<x_0+\alpha \text{ و } x\neq 0)$$

$$x\to x_0 \quad \text{یعنی} \quad x\in]x_0-\alpha \text{ و } x_0+\alpha[-\{x_0\}$$



(فاصله $]x_0-\alpha$ و $x_0+\alpha[$ راهمسایگی x_0 به‌شعاع α می‌نامند.)

ب- اگر مقادیر متغیر x از هرعدد مثبت بزرگی بزرگتر شود، می گوئیم x به‌سمت باضافه بینهایت میل می‌کند و این مطلب را به‌اختصارچنین نشان می‌دهیم: $x\to+\infty$.

$$\forall M>0 \ ، \ x>M \Rightarrow x\longrightarrow+\infty$$

توجه کنید که $+\infty$ یك عدد نیست و $x\to+\infty$ فقط یك نماد برای نشان دادن مفهوم فوق است.

ج- اگر مقادیر x ازهرعدد منفی کوچکی کوچکترشود ، می گوئیم x به‌سمت منهای‌بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم: $x\to-\infty$.

$$\forall M>0 \ ، \ x<-M \Rightarrow x\longrightarrow-\infty$$

توجه کنید که روی محور اعداد حقیقی جائی بنام $-\infty$ نداریم و $x\to-\infty$ فقط‌نمادی برای نشان دادن مفهوم بالا است.

۲-۲- حد تابع

اکنون تابع f و فاصلهٔ باز I و نقطهٔ x_0 از این فاصله را درنظرمی گیریم‌و فرض می‌کنیم که f در I (مگر محتملا در x_0) تعریف شده است . می‌گوئیم: حد تابع f وقتی که x به‌سمت x_0 میل کند عدد (حقیقی) L است و می‌نویسیم :

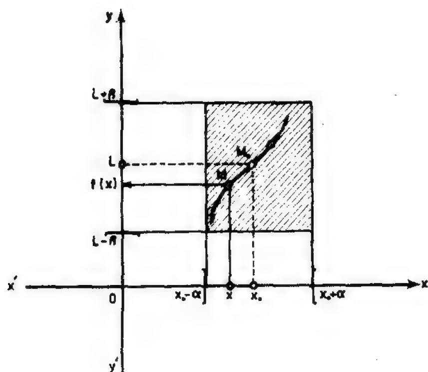
$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}} f(x)=L$$

هرگاه به‌ازای هرعدد مثبت β عدد مثبتی مانند α (معمولا به β بستگی دارد) وجـود داشته باشد به قسمی که داشته باشیم:

$$(I) \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

در تعریف فوق β و α دو عدد مثبت‌اند که هر اندازه بخواهیم می‌توانیم آنها را کوچك اختیارکنیم. ابتدا باید β را اختیارکنیم وسپس ثابت‌کنیم لااقل‌یك α که‌معمولا به β بستگی‌دارد پیدا می‌شودکه استلزام بالا صحیح باشد.

D_f دامنهٔ تعریف تابع است و بدیهی است که x باید متعلق به دامنه باشد تا $f(x)$ تعریف شده باشد. از این رو گاهی اوقات در استلزام فوق از نوشتن شرط $x \in D_f$ خودداری می کنیم ولی استنباط چنین خواهدبودکه همواره x به D_f متعلق است. علاوه براین همانطورکه درتعریف $x \to x_0$ دیدیم x نباید برابر x_0 اختیار شود.



معمولا برای مختصر و ساده نویسی ، تعریف $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ حد ، را به‌صورت نمادی زیر می‌نویسند. (نماد «$\ni$» خوانده می‌شود: به‌قسمی‌که یا به‌طوریکه).

$$\forall \beta > 0 \ \exists \alpha > 0 \ni \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

۲-۳- نکات قابل توجه درحد

اگرتابع f وقتی x به‌سمت x_0 میل کند حد داشته‌باشد،نکات زیر را باید درنظر داشت :

الف ــ اگر L حد f باشد، L عددی است حقیقی و یگانه (یگانگی آن را در اینجا ثابت نمی‌کنیم.)

ب ــ گفتن اینکه $f(x)$ به سمت L میل می‌کند به تنهائی هیچ معنــی ندارد، مگــر اینکه بگوئیم $f(x)$ به سمت L میل می‌کند وقتی که x به‌سمت مثلا x_0 میل کند.

پ ــ تعریف $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ حد، هم‌ارز است با اینکه بگوئیم بــه ازای هر $\beta>0$ یك $\alpha>0$ وجود دارد بطوریکه اگر $x\neq x_0$ متعلق به‌فاصلهٔ باز $]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ و دامنهٔ تعریف f باشد، آنوقت مقدار f در این x به‌فاصلهٔ باز $]L-\beta, L+\beta[$ متعلق باشد. توجه‌کنید که حد f به‌مقادیر نزدیك به x_0 بستگی دارد نه‌به‌خود x_0. ممکن است $f(x_0)$ اصلا تعریف نشده باشد ویادرصورت تعریف شدن با L مساوی نباشد. مثلا حد تابــع $f(x)=\frac{x^2}{x}$ وقتی $x\to 0$ مساوی با صفراست در صورتیکه $f(0)$ معنی ندارد.

ت ــ برای آنکه نشان دهیم $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ حد، باید $\beta>0$ را به دلخواه انتخاب کنیم ویك $\alpha>0$ به دست‌آوریم که در تعریف حد صدق‌کند. α معمولاً منحصر به فرد نیست و اگــر α_0 در تعریف صادق باشد هرعدد α، $0<\alpha\leqslant\alpha_0$ نیز در تعریف صدق خواهد کرد.

مثال ۱ــ می‌خواهیم با استفاده از تعریف حد ثابت کنیم حد تابع :

$$f(x)=\begin{cases}2x-3 & \text{اگر } x\neq -1 \\ 2 & \text{اگر } x=-1\end{cases}$$

وقتی x به سمت ۱ ــ میل کند برابر ۵ ــ است.

حل ــ باید ثابت کنیم که به‌ازای هر $\beta>0$ یك $\alpha>0$ وجود دارد به‌قسمی که:

$$0<|x-(-1)|<\alpha \Rightarrow |f(x)-(-5)|<\beta$$

چون $|x+1| = |x-(-1)|<0$ بدین معنی است که $x\neq -1$ پس $f(x)=2x-3$ و استلزام فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$0<|x+1|<\alpha \Rightarrow |(2x-3)-(-5)|<\beta$$

ویا :

$$0<|x+1|<\alpha \Rightarrow 2|x+1|<\beta$$

ویا :

$$0<|x+1|<\alpha \Rightarrow |x+1|<\frac{\beta}{2}$$

بنابراین‌کافیست که $\alpha>0$ را کوچکتر از $\frac{\beta}{2}$ یا مساوی آن اختیار کنیم ، تا استلزام درست

زیر به دست آید.

$$\circ < |x+1| < \frac{\beta}{2} \Longrightarrow |(2x-3)-(-5)| < \beta$$

توجه کنید که در این مثال $f(-1)=2$ است در حالیکه $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -5$ حد، پس بطورکلی لازم نیست که حد تابع در یک نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه باشد.

مثال ۲- تابع $f(x)=ax+b$ را که در آن a و b دو عدد حقیقی و ثابت هستند در نظر می‌گیریم. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که حد f وقتی که $x\to x_\circ$ برابر $f(x_\circ)=ax_\circ+b$ می‌باشد. یعنی:

$$\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} (ax+b) = ax_\circ + b$$

حل- حالت اول $a=\circ$، باید ثابت کنیم:

$$\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} (b) = b$$

بنا به‌تعریف باید نشان دهیم:

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-b|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |b-b|<\beta$$

اما $|b-b|=\circ$ و از هر $\beta>\circ$ کوچکتر است پس هر $\alpha>\circ$ در تعریف صدق می‌کند.

حالت دوم $a\neq\circ$. بنابه تعریف باید نشان دهیم:

$$\forall\beta>\circ \ \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |(ax+b)-(ax_\circ+b)|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |a(x-x_\circ)|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |x-x_\circ|<\frac{\beta}{|a|}$$

بنابراین کافیست α را مثبت و کوچکتر از $\frac{\beta}{|a|}$ یا مساوی آن اختیار کنیم تا تعریف برقرار شود. در حقیقت اگر $\circ<|x-x_\circ|<\frac{\beta}{|a|}$ آنوقت $|a||x-x_\circ|<\beta$ ویا $|a(x-x_\circ)|<\beta$ ویا $|(ax-b)-(ax_\circ-b)|<\beta$ که حکم مورد نظر است.

۲-۴- حد در بینهایت و حدهای بینهایت

تاکنون درمورد $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ حد، که درآن نه x_0 و نه L بینهایت بودند بحث کرده‌ایم.

ولی حالتهائی وجود دارد که در آنها x_0 یا L یا هر دو متفقاً $+\infty$ یا $-\infty$ و یا ∞ هستند. حالتی راکه‌هم x_0 وهم L اعداد حقیقی هستند دیده‌اید. اکنون یکی ازحالتها راطرح و برای آن مثالی می‌زنیم، سپس همهٔ حالتها را درجدولی خلاصه‌می‌کنیم تا مراجعه به آن‌آسان باشد.

تعریف- فرض‌کنیدکه تابع f برای هر $x > a$ تعریف شده باشد،که درآن a عددی است حقیقی. گوئیم وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل‌کند حد f عدد حقیقی L است ومی‌نویسیم:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

هرگاه به ازای هر $\beta > 0$ لااقل‌یك $M > 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که:

$$x \in D_f \text{ و } x > M \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

یا بطور نمادی:

$$\forall \beta > 0 \ \exists M > 0 \ \ni \ x > M \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

مثال- ثابت کنیدکه:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{2x - 4} = \frac{3}{2}$$

حل- باید نشان دهیم که:

$$\forall \beta > 0 \ \exists M > 0 \ \ni x > M \Longrightarrow \left| \frac{3x + 2}{2x - 4} - \frac{3}{2} \right| < \beta$$

فرض می‌کنیم طرف دوم‌گزاره فوق درست باشد. اکنون سعی می‌کنیم به‌کمك‌آن M را حدس بزنیم و سپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما نامساوی طرف دوم‌گزاره فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\left| \frac{3x + 2}{2x - 4} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{8}{(2x - 4)} \right| = \frac{8}{|2x - 4|} < \beta$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$|2x - 4| > \frac{8}{\beta} \quad \text{یا} \quad x - 2 > \frac{4}{\beta} \quad \text{یا} \quad x > 2 + \frac{4}{\beta}$$

بنابراین‌کافی است‌که M را بزرگتر یا مساوی $\frac{4}{\beta} + 2$ اختیار کنیم، یعنی اگر $M \geqslant 2 + \frac{4}{\beta}$ باشد خواهیم‌داشت:

$$x > (2 + \frac{4}{\beta}) \Longrightarrow \left| \frac{3x + 2}{2x - 4} - \frac{3}{2} \right| < \beta$$

بنابراین اگر $x>۲+\frac{۴}{\beta}$ باشد می‌توان نوشت :

$$x>۲+\frac{۴}{\beta}$$

$$x-۲>\frac{۴}{\beta}$$

$$\frac{x-۲}{۴}>\frac{۱}{\beta}$$

چون $\frac{۱}{\beta}>۰$ است ، $\frac{x-۲}{۴}>۰$ بوده:

$$\left|\frac{x-۲}{۴}\right|>\frac{۱}{\beta}$$

$$\left|\frac{۴}{x-۲}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{x-۲}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{۳x-۶+۸}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

پس:

$$x>۲+\frac{۴}{\beta}\Longrightarrow\left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

۲-۵- جدول حد درحالتهای مختلف

تمام حالتهای مختلف حد دربینهایت وحدهای بینهایت درجدول زیر تنظیم شده که برای خواندن هر سطر نمادهای آن سطر را به‌ترتیب به‌جای سه نقطه‌های ابتدای جدول (از بالا)قرار داده وعبارت حاصل را ازچپ به‌راست میخوانیم. مثلا سطر هفتم را چنین می‌خوانیم.

وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل‌کند $f(x)$ به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کـرد هرگاه برای هر $N>۰$ یك $M>۰$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که ازنامساوی $x>M$ نامساوی $f(x)<-N$ نتیجه شود.

تذکر: وقتی x به‌سمت $x_۰+$ میل می‌کندحد$f(x)$ برابر $+\infty$ یا $(-\infty)$است به‌صورت $\lim_{x\to x_۰+} f(x)=+\infty$ یا $(-\infty)$ حد، و همچنین وقتیx به‌سمت $x_۰-$ میل کندحد $f(x)$ برابر $(+\infty)$

یا $-\infty$ است به‌صورت $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ یا $(+\infty)$، بعضی ازمؤلفین این دو مسئله رایک جا به صورت $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = +\infty$ می‌نویسند و می‌گویند وقتی x به سمت x_0 میل می‌کند حد $|f(x)|$ برابر $+\infty$ است (سطر چهارم جدول).

تذکر: وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است به‌صورت $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ و

همچنین وقتی x به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است به‌صورت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$،

بعضی از مؤلفین این دومسئله را یك‌جا به‌صورت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ می‌نویسند ومی‌گویند وقتی x به سمت ∞ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است (سطر یازده جدول).

جدول تعریف حدتابع $f: x \to f(x)$

نامساوی ... نتیجه شود	به قسمی که از نامساوی...	یك...وجود داشته باشد	هرگاه برای هر...	$f(x)$ به سمت ... میل خواهد کرد	وقتی x به‌سمت ... میل کند
$\|f(x)-L\|<\beta$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\alpha>0$	$\beta>0$	L	x_0
$f(x)>N$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\alpha>0$	$N>0$	$+\infty$	x_0
$f(x)<-N$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\alpha>0$	$N>0$	$-\infty$	x_0
$\|f(x)\|>N$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\alpha>0$	$N>0$	∞	x_0
$\|f(x)-L\|<\beta$	$x>M$	$M>0$	$\beta>0$	L	$+\infty$
$f(x)>N$	$x>M$	$M>0$	$N>0$	$+\infty$	$+\infty$
$f(x)<-N$	$x>M$	$M>0$	$N>0$	$-\infty$	$+\infty$
$\|f(x)-L\|<\beta$	$x<-M$	$M>0$	$\beta>0$	L	$-\infty$
$f(x)>N$	$x<-M$	$M>0$	$N>0$	$+\infty$	$-\infty$
$f(x)<-N$	$x<-M$	$M>0$	$N>0$	$-\infty$	$-\infty$
$\|f(x)-L\|<\beta$	$\|x\|>M$	$M>0$	$\beta>0$	L	∞
$f(x)>N$	$\|x\|>M$	$M>0$	$N>0$	$+\infty$	∞
$f(x)<-N$	$\|x\|>M$	$M>0$	$N>0$	$-\infty$	∞

مثالـ تابع f بوسیله دستور $f(x)=\frac{-1}{(x-3)^2}$ داده شده است. ثابت کنید که اگر x به سمت ۳ میل کند f(x) به‌سمت ∞ − میل خواهد کرد.

حلـ بنا به سطر سوم جدول باید برای‌هر $N>0$ لااقل یك $\alpha>0$ بیابیم به‌قسمی که:

$$0<|x-3|<\alpha \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

فرض می‌کنیم که طرف دوم گزاره فوق درست باشد حال سعی می‌کنیم به‌کمك آن α را حدس بزنیم و سپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما:

$$\frac{-1}{(x-3)^2}<-N \Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2}>N \Rightarrow (x-3)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow |x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

بنابراین دیده میشود که هرعدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ رامی‌توان به‌عنوان α اختیار کرد. حال فرض کنید داشته باشیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$، در نتیجه:

$$0<|x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow 0<(x-3)^2<\frac{1}{N} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-3)^2}>N \Rightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

یعنی جوابی که‌برای α حدس‌زده بودیم گزارهٔ شرطی فوق را به‌یك استلزام تبدیل می‌کندو اثبات‌کامل‌است امتحان‌جواب α به‌منظورروشن شدن‌مفهوم‌درس است‌وانجام‌آن‌همیشه ضرورت‌ندارد.

توجهـ همانطور که مشاهده کرده‌اید سعی شده است که مثالهای ساده‌ای در مورد تعیین‌حد توابع بااستفاده از تعریف‌داده شود واین بدان سبب‌بوده است که بیشتر بامفهوم حدآشنا شوید. اصولا محاسبهٔ حد با استفاده از تعریف‌کار ساده‌ای نیست ومعمولا برای این محاسبات ازقضـایای حدکه بعداً درمورد آنها صحبت خواهیم کرد استفاده می‌شود بهمین سبب درزیرسعی شده است که تمرینهای ساده‌ای گنجانده شود.

تمرین:

تساویهای زیر را با استفاده از تعریف حد ثابت کنید.

۱ـ $\lim_{x\to 1}(-3x-1)=-4$

۲ـ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

۳ـ $\lim_{x\to 1}(x^2-2x)=-1$

۴ـ $\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

۵ـ $\lim_{x\to 2}\frac{-1}{(x-2)^2}=-\infty$

۶ـ $\lim_{x\to 1}\frac{4}{(x-1)}=\infty$

۷ـ $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x-4}{x-1}=5$

۸ـ $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{4x^2-1}=+\infty$

۹ـ $\lim_{x\to +\infty}\left(-\sqrt{x^2-2x}\right)=-\infty$

۱۰ـ $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+1}=2$

۱۱ـ $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-4}=+\infty$

۱۲- $\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\ \sqrt[۳]{x^{۳}+۱} = -\infty$

۱۳- $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ \dfrac{۲x^{۲}+۴}{x^{۲}} = ۲$

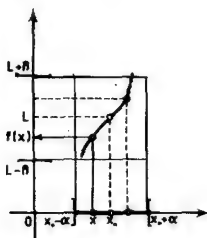
۱۴- $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ \sqrt{x^{۲}-۲x-۱} = +\infty$

۱۵- $\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\ -\sqrt{x^{۲}-۴x+۳} = -\infty$

۲-۶- حد چپ و راست یک تابع

فرض کنید که تابع f درنقطهٔ $x_{\circ}$ دارای‌حدی برابرعدد L باشد. درنتیجه به‌ازای هر $\beta>\circ$ یك $\alpha>\circ$ موجود است به‌قسمی‌که:

$$\circ<|x-x_{\circ}|<\alpha \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$



از این تعریف چنین برمی‌آید که وقتی x به‌سمت $x_{\circ}$ میل کند، خواه از آن‌بزرگتر باشد خواه از آن کوچکتر، f(x) درهر دوحالت به‌سمت L میل‌خواهدکرد پس داریم:

$$(۱)\quad x_{\circ}<x<x_{\circ}+\alpha \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

و

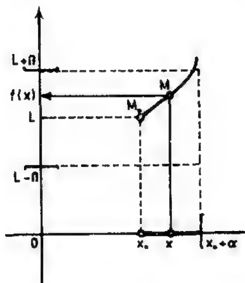
$$(۲)\quad x_{\circ}-\alpha<x<x_{\circ} \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

مطالب فوق ما را به تعریف زیرهدایت می‌کند.

تعریف- تابع f و نقطهٔ $x_{\circ}$ مفروضند.

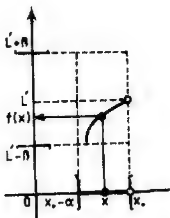
الف- فرض‌کنید‌که $a>x_{\circ}$ و f در فاصلهٔ $]x_{\circ}$ و $a[$ تعریف شده باشد. گوئیم تابع f

در نقطهٔ x_0 دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$ حد راست، هرگاه به ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود باشد به‌قسمی که:



$$x_0 < x < x_0 + \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

ب‍ـ فرض کنید که $a < x_0$ و f درفاصلهٔ باز $]a, x_0[$ تعریف شده باشد، گوئیم تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حد چپ L' است و می‌نویسیم $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L'$ حد، هرگاه به‌ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود باشد به‌قسمی که:



$$x_0 - \alpha < x < x_0 \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L'| < \beta$$

اگر تابع f درنقطهٔ x_0 دارای حد L باشدآنوقت استلزامهای (۱) و (۲) بالانشان‌می‌دهند که f در x_0 دارای حد راست وچپ بوده و این دوحد باهم مساوی و مساوی همان L می‌باشند. به‌عکس می‌توان دید (که ما دراینجا ازاثبات آن‌خودداری می‌کنیم) که اگر تابع f در x_0 دارای حد راست و حدچپ بوده واین دوحد بایکدیگر مساوی وبرابر L باشند آنوقت f در x_0 دارای حد L است. پس می‌توان گفت:

قضیه- تابع f در x_0 دارای حد L است اگر و تنها اگر، f در x_0 دارای حد چپ و حد راست مساوی L باشد.

مثال۱- با استفاده از تعریف حد راست ثابت کنید که $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$

حل- برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 2<x<2+\alpha \Longrightarrow |\sqrt{x-2}-0|<\beta$$

و یا:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 2<x<2+\alpha \Longrightarrow \sqrt{x-2}<\beta$$

و یا با مجذور کردن سمت راست استلزام اخیر:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 2<x<2+\alpha \Longrightarrow 0\leqslant x-2<\beta^2$$

و یا:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 2<x<2+\alpha \Longrightarrow 2\leqslant x<2+\beta^2$$

بنابراین دیده می‌شود که اگر $0<\alpha\leqslant\beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است.

مثال۲- با استفاده از تعریف حد چپ ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

حل: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ x_0-\alpha<x<x_0 \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 1-\alpha<x<1 \Longrightarrow |\sqrt{1-x}-0|<\beta$$

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 1-\alpha<x<1 \Longrightarrow |\sqrt{1-x}|<\beta$$

با مجذور کردن سمت راست استلزام اخیر خواهیم داشت:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 1-\alpha<x<1 \Longrightarrow 0\leqslant 1-x<\beta^2$$

و یا:

$$\forall\beta>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ 1-\alpha<x<1 \Longrightarrow 1-\beta^2<x\leqslant 1$$

بنابراین دیده میشود اگر $0<\alpha\leqslant\beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است.

$$1-\beta^2<x<1 \Longrightarrow |\sqrt{1-x}-0|<\beta$$

قبل از پرداختن به مثال۳ توجه شمارا به این نکته جلب می‌کنیم که می‌توان‌تعاریفی شبیه به‌آنچه که‌درمورد‌حد چپ وحد راست در x_0 بیان کردیم درموردحالت‌های ∞ و $-\infty$ و $L=+\infty$ نیز بیان کرد تعریف $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$، به‌طور نمادی چنین است:

$$\forall N>0 \ \exists\ \alpha>0 \ \ni\ x_0-\alpha<x<x_0 \Longrightarrow f(x)>N$$

مثال۳: ، در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با استفاده از تعریف حد راست و حد چپ، ثابت کنید که:

الف : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

ب : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

حل ـ الف: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \ \exists \alpha>0 \ni x_0<x<x_0+\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

$$\forall N>0 \ \exists \alpha>0 \ni 0<x<0+\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

$$0<x<\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

فرض می کنیم طرف دوم گزاره فوق درست باشد. یعنی $\frac{1}{x}>N$ (چون N مثبت است x هم مثبت خواهد بود) طرفین نامساوی را معکوس می کنیم نتیجه می‌شود $0<x<\frac{1}{N}$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را به عنوان α اختیار کنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{N}$ استلزام فوق برقرار است.

$$0<x<\frac{1}{N} \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

حل ـ ب: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \ \exists \alpha>0 \qquad x_0-\alpha<x<x_0 \Longrightarrow f(x)<-N$$

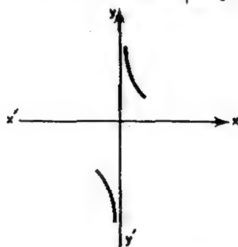
$$0-\alpha<x<0 \Longrightarrow \frac{1}{x}<-N$$

فرض می کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد. یعنی $\frac{1}{x}<-N$ (چون $-N$ منفی است، x هم منفی خواهد بود.) طرفین نامساوی را معکوس می کنیم نتیجه می‌شود $-\frac{1}{N}<x<0$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را به عنوان α اختیار کنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{N}$ و استلزام فوق برقرار است.

$$-\frac{1}{N}<x<0 \Longrightarrow \frac{1}{x}<-N$$

تذکر: توجه دارید تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وقتی که x به سمت صفر میل می کند حد ندارد زیرا حد چپ و حد راست آن با هم مساوی نیستند.

وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند $|f(x)|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند . منحنی نمایش این تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر درزیر رسم شده است.



مثال۴ـ درتابع $f(x)=\frac{1}{x^{2}}$. بااستفاده ازتعریف حدثابت‌کنید:

الف ـ حد$_{x\to 0^{+}}$ $f(x)=+\infty$ ب ـ حد$_{x\to 0^{-}}$ $f(x)=+\infty$

حل ـ الف: برای اثبات حد راست باید نشان دهیم که :

$$\forall N>0 \qquad \exists\ \alpha>0 \quad x_0<x<x_0+\alpha \Longrightarrow f(x)<N$$

$$0<x<0+\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x^{2}}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد یعنی $\frac{1}{x^{2}}>N$ (چون N مثبت است)

طرفین نامساوی را معکوس می‌کنیم $0<x^{2}<\frac{1}{N}$ و از طرفین جذر می‌گیریم نتیجه میشود :

$$0<x<\frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \text{یا} \qquad |x|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را به‌عنوان α اختیارکنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$ استلزام فوق برقرار است.

$$0<x<\frac{1}{\sqrt{N}} \Longrightarrow \frac{1}{x^{2}}>N$$

حل ـ ب: برای اثبات حد چپ باید نشان دهیم‌که:

$$\forall N>0 \qquad \exists\ \alpha>0 \qquad x_0-\alpha<x<x_0 \Longrightarrow f(x)>N$$

$$0-\alpha<x<0 \Longrightarrow \frac{1}{x^{2}}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم‌گزارهٔ فوق درست باشد یعنی $\frac{1}{x^{2}}>N$ (چونNمثبت‌است)طرفین

نامساوی را معکوس می‌کنیم $\frac{1}{N} > x^2 > 0$ و از طرفین جذر می‌گیریم نتیجه‌میشود $|x| < \frac{1}{\sqrt{N}}$

و یا می‌توانیم بنویسیم : $x < \frac{1}{\sqrt{N}}$ یا $x > -\frac{1}{\sqrt{N}}$

و یا $-\frac{1}{\sqrt{N}} < x < 0$ پس اگرهرعدد مثبت کوچکتریامساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را به‌عنوان α اختیارکنیم

$0 < \alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$ استلزام فوق برقرار است.

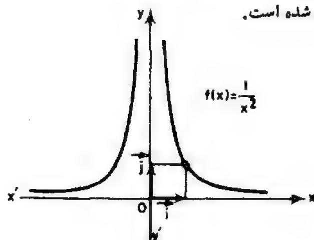
$$-\frac{1}{\sqrt{N}} < x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > N$$

تذکر ـ در اینجا نیز f درصفر تعریف نشده است و دامنهٔ تعریف تابع مجموعهٔ $R - \{0\}$ می‌باشد. خواه x مثبت باشد و خواه منفی و به‌سمت صفر میل کند، $f(x)$ بـه‌سمت $+\infty$ میـل خواهدکرد یعنی:

$$\underset{x \to 0^+}{\text{حد}} f(x) = +\infty$$

$$\underset{x \to 0^-}{\text{حد}} f(x) = +\infty$$

چون‌حدسمت‌چپ و حدسمت‌راست تابع مساوی‌هستند،پس‌تابع $\frac{1}{x^2}$ حد دارد ولی این حد با پایان نیست. به این سبب‌گاهی‌گفته می‌شود تابع حد ندارد یعنی حدباپایانی‌مانند L را ندارد درشکل نمودار تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر رسم شده است.



نتیجه: در توابع‌کسری وقتی x به‌سمت ریشه ساده مخرج میل‌کند . حد چپ و حد راست تابع مساوی نیستند اگر یکی $+\infty$ باشد دیگـری $-\infty$ خواهد بود و برعکس . و وقتی x به‌سمت ریشه مضاعف مخرج میل کند حد چپ و حد راست تابـع مساویند . (یا هر دو $+\infty$ ویا هر دو $-\infty$ اند.)

۲-۷- دوتابع هم‌ارز

دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم، اگر این دو تابع در x_0 حد داشته و بعلاوه $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ ، آن دو تابع راوقتی x به سمت x_0 میل کند هم‌ارز گویند و می‌نویسند $f\sim g$. در تعریف فوق x_0 می‌تواند هرعدد حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد.

مثال ۱- تابع‌های $\sin x$ و x وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند هم‌ارز می‌باشند. (اثبات این مطلب را درسال سوم دیده‌اید):

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

در محاسبهٔ حد یك‌عبارت در نقطهٔ x_0 می‌توان به‌جای هر تابع شرکت کننده درآن عبارت تابعی هم‌ارزآن (وقتی x به‌سمت x_0 میل کند) را قرار داد.

مثال ۲- می‌توانیم از این خاصیت مثلا در مورد پیدا کردن حد تابع $\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$ استفاده کنیم، یعنی به‌جای هرتابع هم‌ارز آنرا قرار بدهیم، پس خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}$$

در قضایای زیر منظور از یك تابع حددار تابعی است که دریك نقطه حد داشته و حدش با پایان باشد.

قضایای حد

۲-۸- قضیه

حد مجموع دو تابع حددار مساوی است با مجموع حدود آنها.

۲-۹- قضیه

اگر تابع حد داری‌را درعدد ثابتی ضرب کنیم حد آن درهمان عدد ضرب‌خواهد شد.

مثال-

$$\lim_{x\to 0}\left(-2\frac{\sin x}{x}\right)=-2\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-2\times 1=-2$$

۲-۱۰- قضیه

حد تفاضل دو تابع حددار مساوی است با تفاضل حدود آنها.

۲-۱۱- قضیه

حد حاصل ضرب دو تابع حددار مساوی است با حاصلضرب حدودآنها.

مثال-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\sin x\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) =$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \sin x\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 0 \times 1 = 0$$

تبصره- قضایای ۲-۸ و ۲-۱۱ را می‌توان درمورد چند تابع نیز بیان کرد.

۲-۱۲- قضیه

حد خارج قسمت دوتابع حددار مساوی است با خارج قسمت حدهای آنها به‌شرطی که حد مخرج صفر نباشد.

این قضیه را نیز بدون اثبات می‌پذیریم.

۲-۱۳- قضیه

حد ریشهٔ n ام یا توان n ام یك تابع حددار مساوی با ریشهٔ n ام یا توان n ام حد همان تابع است.

اثبات- برای حالت توان n ام قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

بنا به تبصرهٔ فوق داریم:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \underbrace{(\lim_{x\to x_0} f(x))\,(\lim_{x\to x_0} f(x))\cdots(\lim_{x\to x_0} f(x))}_{\text{n بار}} =$$

$$\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{\text{n بار}} = L^n$$

تبصره- این قضایا درحالتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند نیز صادق می‌باشند. البته توجه دارید که در این قضایا فرض شده است که حدود توابع مورد بحث با پایان هستند و بینهایت نمی‌باشند. درغیر این صورت می‌توانیم نتایج زیررا اضافه کنیم:

I- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به‌سمت مقدار باپایانی میل کند مجموع $f+g$ به‌ترتیب به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهدکرد.

II- اگر f بهسمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به سمت مقدار با پایان مثبتی میل کند حاصل ضرب f.g به ترتیب به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهدکرد اگرحد g مثبت و بهسمت مقدار با پایان منفی میل کند حاصلضرب بهسمت $-\infty$ یا $+\infty$ میل خواهد کرد.

III- اگر f بهسمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g بهسمت یك حد با پایان میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

IV- اگر g بهسمت صفر و f بهسمت یك حد با پایان غیرصفر میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ بهسمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

V- اگر g بهسمت $-\infty$ یا $+\infty$ و f بهسمت یك حد با پایان میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ بهسمت صفر میل خواهد کرد.

۲-۱۴- قضیه

اگر x بهسمت صفر میل کند هرچند جملهای از x هم ارز جملهای از آن چند جملهای خواهد بود که دارای کوچکترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جملهای $P(x)$ بهصورت زیر باشد:

$$P(x)=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\dots+a_mx^m \quad , \quad n<m\leqslant 0 \text{ و } a_n\neq 0 \text{ و } a_m\neq 0$$

از جملهٔ اول که دارای کوچکترین توان است فاکتور می گیریم، خواهیم داشت:

$$P(x)=a_nx^n\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}x+\dots\frac{a_m}{a_n}x^{m-n}\right)$$

حال اگر x بهسمت صفر میل کند داخل پرانتز بهسمت ۱ میل می کند و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(x)}{a_mx^n}=1 \qquad\qquad \underset{x\to 0}{P(x)}\sim\underset{x\to 0}{a_nx^n}$$

۲-۱۵- قضیه

اگر x بهسمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند هر چند جملهای از x هم ارز آن جملهای از چند جملهای خواهد بود که دارای بزرگترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جملهای $P(x)$ به شکل زیر باشد:

$$P(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0 \quad , \quad a_m\neq 0$$

از جملهٔ اول که دارای بزرگترین توان است فاکتور می گیریم خواهیم داشت:

$$P(x)=a_m x^m\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m x}+\dots+\frac{a_n}{a_m x^m}\right)$$

اگر x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند داخل پرانتز به‌سمت ۱ میل خواهد کرد و در نتیجه:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\ \frac{P(x)}{a_m x^m}=1 \Longrightarrow \underset{x\to\pm\infty}{P(x)} \sim \underset{x\to\pm\infty}{a_m x^m}$$

۲-۱۶- قضیه

حد تابع $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0}$ وقتی که x میل می‌کند به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برابراست با حد نسبت جملهٔ بزرگترین درجه صورت‌به جملهٔ بزرگترین درجهٔ مخرج وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یعنی:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\ f(x)=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\ \frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\ \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$$

تذکر: با استفاده از قضایای فوق مسائل زیر بسادگی اثبات میشوند.

۱- حد تابع ثابت $f(x)=c$ وقتی که $x\to x_0$ برابر مقدار ثابت است یعنی:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f(x)=c$$

۲- اگر f تابع با ضابطهٔ $n\in N$ و $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ باشد.
حد تابع f وقتی که $x\to x_0$ برابر $f(x_0)$ است یعنی:

$$\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ f(x)=f(x_0)$$

$$\underset{x\to x_0^+}{\text{حد}}\ f(x)=f(x_0)$$

$$\underset{x\to x_0^-}{\text{حد}}\ f(x)=f(x_0)$$

۳- اگر f تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_0}$$

باشد. حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to x_0$ در صورتیکه $Q(x_0)\neq 0$ باشد. برابر است با:
$f(x_0)=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ یعنی:

$$\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} P(x)}{\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} Q(x)} = \frac{P(x_\circ)}{Q(x_\circ)} \quad \text{و} \quad Q(x_\circ) \neq \circ$$

۴ــ ثابت می‌کنند که توابع $\sin x$ و $\cos x$ درهر نقطه $x_\circ \in R$ دارای حد هستند و حدهر یك از آنها برابر مقدار آن تابع در $x_\circ$ است یعنی:

$$\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} \sin x = \sin x_\circ$$

$$\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} \cos x = \cos x_\circ$$

۲-۱۷ــ مسئله اصلی

اینك یك مسئله اساسی راکـه عبارت از پیداکردن حد یك تابع‌است مطرح می‌کنیم . در خیلی از توابع به صورت $f{:}x\to y = f(x)$ وقتی که x بسمت مقدار ثابت $x_\circ$ میل می‌کند حد تابع f همان مقدار $f(x_\circ)$ می‌شود

یعنی:

$$\underset{x\to x_\circ}{\text{حد}} f(x) = f(x_\circ)$$

ولی این مطلب عمومیت ندارد زیرا ممکن است.

الف‌ــ تابع حد نداشته باشد ولی $f(x_\circ)$ وجود داشته باشد.

بــ تابع حد داشته‌باشد ولی $f(x_\circ)$ وجود نداشته باشد .

جــ تابع حد داشته باشد و $f(x_\circ)$ هم وجود داشته باشد ولی با هم مساوی نباشند.

مثال۱ــ تابع $f(x) = x + ۲ + \sqrt{x}$ داده شده است. اگر x بسمت صفر میـل کند حد تابع و همچنین $f(\circ)$ را حساب کنید.

حل‌ــ ملاحظه می‌شودکه $f(\circ) = ۲$ است ولی اگر x بسمت صفرمیل بکند تابع حدندارد زیراکه حد چپ ندارد یعنی مقدار «$\underset{x\to \circ^-}{\text{حد}} (x + ۲ + \sqrt{x})$» موجود نیست.

مثال۲ــ تابع f بوسیله دستور $f(x) = ۳x + ۲$ برای اعداد غیر درست تعریف شده‌است وقتی x بسمت ۲ میل‌کند حد این تابع را حساب کنید.

حل‌ــ چون ۲ عددی درست است بنابراین $f(۲)$ وجود ندارد. ولی تابع حد دارد زیرا وقتی x بسمت ۲ میل‌می‌کند x مخالف ۲ است ودرنتیجه $f(x) = ۳x + ۲$ و از این‌روی‌حدش همان حد تابع $۳x + ۲$ است‌که برابر ۸ می‌باشد.

مثال۳ـ تابع $g(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{اگر } x \text{ عددی درست نباشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ عددی درست باشد} \end{cases}$ داده شده است

حد $\lim_{x\to 2} g(x)$، و مقدار $g(2)$ را محاسبه کنید. آیا این دو مساوی‌اند؟

حل ـ وقتی x عددی درست نباشد $g(x)=x^2+1$ است از طرفی می‌دانیم که حد یك تابع در یك نقطه به مقدار خود تابع در آن نقطه بستگی ندارد پس حد g وقتی x به‌سمت ۲ میل کند برابر ۵ است زیرا: $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}(x^2+1)=5$، اما مقدار g درنقطه $x=2$ برابر صفر است:

پس داریم: $\lim_{x\to 2} g(x)=5\neq 0=g(2)$

از این مقدمه چنین نتیجه می‌شود که وجود $f(x_0)$ برای موجود بودن حد وقتی که x به‌سمت x_0 میل می‌کند نه شرط لازم است و نه‌شرط کافی، وفقط در توابع پیوسته است که حد تابع با مقدار $f(x_0)$ مساوی می‌شود.

به هرحال درصورتی‌که x به سمت x_0 میل می‌کند برای تعیین حد تابع $f(x)$ باید به‌نکات زیر توجه داشت:

۱ـ آیا تابع درهمسایگی x_0 تعریف شده است یا خیر؟ درصورتیکه تابع در همسایگی x_0 تعریف نشده باشد حد در آن نقطه مفهومی ندارد.

مثال ـ حد تابع $f(x)=\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{x(x-1)}$ را وقتی که $x\to 0$ بدست آورید

حل: $f(0)=0$ وجود دارد ولی تابع درنقطه $x_0=0$ حد ندارد زیرا درهمسایگی $x=0$ تابع تعریف نشده است.

۲ـ اگر x ازطرف راست یا چپ به سمت x_0 میل بکند، این دومیل بایکدیگر فرق‌دارند یا خیر؟ برای این منظور اغلب ازروش زیر استفاده می‌کنند. ابتدا درعبارت $f(x)$ به جای x مقدار $x=x_0+\varepsilon$ را قرار داده تا $f(x)$ تبدیل به $f(x_0+\varepsilon)$ می‌شود، درعبارت اخیر یك دفعه $\varepsilon>0$ فرض کرده و به‌سمت صفر میل می‌دهیم و یك دفعه $\varepsilon<0$ فرض کرده به‌سمت صفر میل می‌دهیم اگر دو حد برابر بودند تابع حد خواهد داشت.

به‌طور کلی اگر $f(x_0+\varepsilon)=l+\varepsilon'$ در آید به‌قسمی که $|\varepsilon|<\alpha \Longrightarrow |\varepsilon'|<\beta$ دراین‌صورت حد تابع l خواهد بود.

و اگر $f(x+\varepsilon)=\frac{k}{\varepsilon'}$ با همان‌شرط درآید دراین‌صورت حد تابع $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد

بود برای صفرکردن ε درعبارت $f(x_\circ + \varepsilon)$ نباید عجله کرد زیرا که با این عمل ممکن است اشتباهی رخ بدهد و به علاوه ε بینهایت‌کوچك است وصفر نیست.

۳- اگر $f(x_\circ)$ بی‌معنی یا مبهم باشد، دراین صورت نقطهٔ $x_\circ$ ومقدار $f(x_\circ)$ را از مسئله جدا می‌کنیم و درآنچه باقی می‌ماند حد تابع را معلوم می‌کنیم.

مثال۱- حد چپ وحد راست تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x>۱ \\ ۲ & x=\circ \\ ۲x+۱ & x<۱ \end{cases}$ را وقتی‌که $x\to ۱$ حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to ۱+} f(x) = \lim_{x\to ۱+} (x^۲-۱)=\circ$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۲x+۱)=۳$$

مثال۲- حد چپ وراست تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۳}}{x-۱}$ را وقتی که $x\to ۱$ پیدا کنید.

حل: می‌توانیم $x=۱+\varepsilon$ اختیار کنیم که ε مثبت یا منفی به سمت‌صفر میل می‌کند خواهیم داشت:

$$f(۱+\varepsilon)=\frac{\sqrt{(۱+\varepsilon)^۲+۳}}{۱+\varepsilon-۱}=\frac{\sqrt{۴+\varepsilon^۲+۲\varepsilon}}{\varepsilon}$$

اگر $\varepsilon>\circ$ باشد:

$$\lim_{x\to ۱+} f(x)=\lim_{x\to ۱+}\frac{\sqrt{x^۲+۳}}{x-۱}=\lim_{\varepsilon\to\circ+}\frac{\sqrt{۴+\varepsilon^۲+۲\varepsilon}}{\varepsilon}=+\infty$$

اگر $\varepsilon<\circ$ باشد:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x^۲+۳}}{x-۱}=\lim_{\varepsilon\to\circ^-}\frac{\sqrt{۴+\varepsilon^۲+۲\varepsilon}}{\varepsilon}=-\infty$$

مثال۳- حدتابع $f(x)=x+\frac{\sqrt{x^۲}}{x}$ راوقتی که x به‌سمت‌صفر میل‌می‌کنددرصورت وجود تعیین کنید.

حل: می‌توانیم بنویسیم $f(x)=x+\frac{|x|}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر} \quad x>0 \\ \text{تعریف‌نشده} & \text{اگر} \quad x=0 \\ x-1 & \text{اگر} \quad x<0 \end{cases}$$

اگر حالت $x=0$ و $f(0)$ را کنار بگذاریم

$$\underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\ f(x) = \underset{x\to 0^+}{\text{حد}}\ (x+1) = 1$$

$$\underset{x\to 0^-}{\text{حد}}\ f(x) = \underset{x\to 0^-}{\text{حد}}\ (x-1) = -1$$

حد چپ برابر ۱ − و حد راست برابر یك است پس تابع در $x_0 = 0$ حد ندارد زیرا حد چپ و راست آن باهم برابر نیستند.

مثال ۴- حد تابع $f(x) = \frac{5x+2}{x-1}$ را وقتی‌که x به سمت ۲ میل می‌کند پیدا کنید.

حل:

$$\underset{x\to 2}{\text{حد}}\ f(x) = \underset{x\to 2}{\text{حد}}\ \frac{5x+2}{x-1} = \frac{5\times 2+2}{2-1} = 12$$

$$\underset{x\to 2}{\text{حد}}\ f(x) = f(2) = 12$$

۲-۱۸- حد چپ و حد راست درتابع هموگرافیك

تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ به نام تابع هموگرافیك موسوم است و دامنهٔ تعریف آن $D_f = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ است حد چپ وحد راست تابع در موقعی که x به سمت $-\frac{d}{c}$ میل می‌کند با یکدیگر مساوی نیستند اگر تابع صعودی باشد حد چپ ∞ + و حد راست ∞ − است و اگر تابع نزولی باشد حد چپ ∞ − و حدراست ∞ + خواهد بود.

مثال - حد تابع $y = \frac{2x-6}{x-1}$ را وقتی‌که $x \to 1$ میل می‌کند (ریشهٔ مخرج) معین کنید.

چون مشتق تابع $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0$ است داریم:

$$\underset{x\to 1^+}{\text{حد}}\ f(x) = -\infty$$

$$\underset{x\to 1^-}{\text{حد}}\ f(x) = +\infty$$

یعنی تابع بازاء $x \to 1$ حد ندارد و بعلاوه در این مثال $f(1)$ بی‌معنی است.

۲-۱۹- حد چپ و راست در تابع پله‌ای

طبق تعریف تابع پله‌ای داریم:

$\forall x\in R$ و $\exists n\in Z$ ، $n\leqslant x<n+1 \Longrightarrow [x]=n$

در نتیجه: $\forall n\in Z$ و $x\to n^-$ یعنی $n-1\leqslant \bar{n}<n \Longrightarrow [x]=n-1$

پس در نقاط به‌طول عدد صحیح n خواهیم داشت:

حد چپ: $\underset{x\to n^-}{\text{حد}}\ [x]=n-1$

$\forall n\in z$ و $x\to n^+$ یعنی $n\leqslant n^+<n+1 \Longrightarrow [x]=n$

حد راست: $\underset{x\to n^+}{\text{حد}}\ [x]=n$

مقدار تابع: $f(n)=n$

چون در نقاط به طول عدد صحیح، حد چپ و راست تابع با یکدیگر مساوی نیستند پس ایـن تابع در آن نقاط حد ندارد.

تمرین - حد چپ و راست تابع $f(x)=xE(x)$ را وقتی که $x\to 2$ حساب کنید.

۲-۲۰- تعیین حد چندتابع

مثال۱- حد تابع $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-1}$ را وقتی $x\to 1$ پیداکنید.

حل: چون x به‌سمت ریشه مخرج یعنی ۱ میل می‌کند نمی‌توان از دستور زیر استفاده‌نمود.

$$\underset{x\to 1}{\text{حد}}\ f(x)=f(1)$$

در نتیجه باید حد چپ وحد راست تابع را حساب نمود. و می‌توان نوشت:

$$x=1+\varepsilon$$

$$f(1+\varepsilon)=\frac{(1+\varepsilon)^2-2(1+\varepsilon)-1}{(1+\varepsilon)-1}=\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\underset{x\to 1^+}{\text{حد}}\ f(x)=\underset{\varepsilon\to 0^+}{\text{حد}}\left(\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}\right)=-\infty$$

$$\underset{x\to 1^-}{\text{حد}}\ f(x)=\underset{\varepsilon\to 0^-}{\text{حد}}\left(\varepsilon-\frac{2}{\varepsilon}\right)=+\infty$$

مثال۲- حد تابع $f(x)=\sqrt{x^{2}-3x+3}$ را وقتی که x به‌سمت یك میل‌می‌کندبدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$$

مثال۳- حد تابع $f(x)=-2x^{3}+3x+1$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^{3}+3x+1)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^{3})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^{3}+3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^{3})=+\infty$$

مثال۴- حد تابع $f(x)=\sqrt{x^{2}-3x+2}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2}-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}|x|=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty$$

۲-۲۱- صورتهای مبهم

حتماً تاکنون دربررسی مسائل حد به‌صورتهای

$$\frac{0}{0}\ ،\ \frac{\infty}{\infty}\ ،\ 0\times\infty\ \text{و}\ \infty-\infty$$

برخورده‌اید . این صورتها را صورتهای مبهم می‌گویند ، زیرا مقادیری که سرانجام برای هر یك ازآنها بدست خواهیم آورد معمولا از مسئله‌ای بـه مسئله دیگـر فـرق می‌کند. سه صورت $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty\times 0$ و $\infty-\infty$ قابل تبدیل به صورت $\frac{0}{0}$ می‌باشند. در زیر با ذکر چند مثال روش رفع ابهام‌ازاین صور رابیان خواهیم‌کرد.

مثال۱- حد تابع $f(x)=\frac{5x+2}{2x-1}$ را وقتیکه x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین‌کنید.

حل- این‌کسر به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آید‌که با استفاده از قضیهٔ ۲-۱۵ و آنچه‌کـه در زیر مثال شماره ۲-۷ گفتیم خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x+2}{2x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

البته حد فوق را می‌توان به کمک قاعدهٔ هوپیتال (که در سال سوم دیده‌اید) نیز بدست آورد.

مثال ۲ـ حد تابع $f(x)=\frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}$ را وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین کنید.

حل این کسر نیز به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید که مانند مثال قبل می‌توان عمل کرد.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{5x^2}=\frac{2}{5}$$

مثال ۳ـ حد تابع $f(x)=\frac{4x^3-3x^2+1}{1-x^2}$ را وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین کنید.

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3-3x^2+1}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4x^3}{-x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(-4x)\qquad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty\end{cases}$$

مثال ۴ـ حد تابع $f(x)=\frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}$ را وقتی که $x\to+\infty$ معین کنید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+|x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+x}=\frac{1}{2}$$

مثال ۵ـ حد تابع $f(x)=\frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ حساب کنید.

حل: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x-|x|}{2x-|x|}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-x}{2x-x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-|x|}{2x-|x|}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+x}{2x+x} = \frac{4}{3}$$

مثال۶ـ حد تابع $f(x)=\sqrt{x^2+2x+5}-x$ را وقتی که x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند پیدا کنید.

حل ـ ملاحظه می‌کنیم که تابع در این صورت مبهم است و به‌حالت $\infty-\infty$ درمی‌آید.
برای رفع ابهام تابع و پیدا کردن حد آن به‌روش زیر عمل می‌کنیم:
صورت و مخرج کسر را درمزدوج صورت ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+5}-x}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{x^2+2x+5}-x][\sqrt{x^2+2x+5}+x]}{[\sqrt{x^2+2x+5}+x]}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+2x+5-x^2}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right]}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

در تساوی ماقبل آخر، از این مطلب که $2x \sim (2x+5)$ و $2x \sim (1+\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}})x$ وقتی $x\to+\infty$ استفاده شده است.

مثال۷ـ حد تابع $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}$ را وقتی که x به‌سمت صفر میل می‌کند حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty - \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

مثال ۸ــ حد تابع $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ را وقتی‌که x به‌سمت ۱ میل می‌کند پیدا کنید.

حل ــ این کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید، برای رفع ابهام، صورت ومخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، خواهیم‌داشت:

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

عامل مشترك $x - 1$ را که درصورت ومخرج باعث حالت ابهــام مــی‌شود حذف می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

مثال ۹ــ حد تابع $f(x) = \frac{\sin 3x}{5x}$ را وقتی‌که x به‌سمت صفر میل می‌کند تعیین کنید.

حل ــ وقتی x به‌سمت صفرمیل می‌کند تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. برای رفع ابهــام دو روش‌داریم:

روش اول ــ استفاده از قانون هوپیتال.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3\cos 3x}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

روش دوم ــ استفاده از توابع هم‌ارزــ داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

مثال ۱۰ــ حد تابع $f(x) = x\cot g x$ را وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند تعیین کنید.

حل ــ وقتی x به‌سمت صفر میل‌کند این تابع به‌صورت مبهم $\infty \times 0$ درمی‌آید. برای‌رفع ابهام چنین عمل می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰} x\,cotg\,x = \lim_{x\to ۰}\frac{x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}\cos x =$$

$$\left(\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to ۰}\cos x\right) = ۱ \times ۱ = ۱$$

تمرین:

حد تابعهای زیر را درنقاط داده شده پیدا کنید.

۱ـ $f:x\longmapsto \dfrac{x^۳+۳x^۲-۴}{x^۲-۱}$ ، $x\to ۱$

۲ـ $f:x\longmapsto \dfrac{x^۴-۲x^۲+۱}{x^۲-۵x+۴}$ ، $x\to ۱$

۳ـ $f:x\longmapsto \dfrac{\sqrt{x}-۲}{x^۲-۵x+۴}$ ، $x\to ۴$

۴ـ $f:x\longmapsto \dfrac{۱}{\sqrt{x}}-\dfrac{x+۱}{\sqrt{x}}$ ، $x\to ۰+$

۵ـ $f:x\longmapsto \dfrac{۱}{x(x+۱)}-\dfrac{۱}{x}$ ، $x\to ۰$

۶ـ $f:x\longmapsto \dfrac{x^n-a^n}{a^p-x^p}\quad n،p\in N$ ، $x\to a$

۷ـ $f:x\longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{۱+x^۲}-۱}$ ، $x\to ۰$

۸ـ $f:x\longmapsto \dfrac{\sqrt{x+۵}-۳}{x-۴}$ ، $x\to ۴$

۹ـ $f:x\longmapsto \dfrac{\sqrt{x+۲}-۲}{\sqrt{x+۷}-۳}$ ، $x\to ۲$

۱۰ـ $f:x\longmapsto \dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x-۱}$ ، $x\to ۱$

۱۱ـ $f:x\longmapsto \dfrac{\sqrt{x+۴}-\sqrt{۳x+۴}}{\sqrt{x+۱}-۱}$ ، $x\to ۰$

۱۲- $f: x \longmapsto \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$ ، $x \to 1$

۱۳- $f: x \longmapsto \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ ، $x \to 2$

۱۴- $f: x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ ، $a>0$ ، $x \to a$

۱۵- $f: x \longmapsto \frac{\sin 3x}{\cos 5x}$ ، $x \to 0$

۱۶- $f: x \longmapsto \frac{\sin 3x}{tg 5x}$ ، $x \to 0$

۱۷- $f: x \longmapsto \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ ، $x \to 0$

۱۸- $f: x \longmapsto \frac{\sin^2 x}{tg^2 x}$ ، $x \to 0$

۱۹- $f: x \longmapsto (1+\cos x) tg \frac{x}{2}$ ، $x \to \pi$

۲۰- $f: x \longmapsto \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos x}}$ ، $x \to 0$

۲۱- $f: x \longmapsto (\sin x - 1) tg^2 x$ ، $x \to \frac{\pi}{2}$

۲۲- $f: x \longmapsto (2x^2-3x+1) tg \pi x$ ، $x \to \frac{1}{2}$

۲۳- $f: x \longmapsto (x^2-1) cotg (x^2-1)$ ، $x \to 1$

۲۴- $f: x \longmapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$ ، $x \to 0$

۲۵- $f: x \longmapsto \frac{x(1-x)\sin \lambda x}{1-\cos 2x}$ ، $\lambda \neq 0$ ، $x \to 0$

۲۶- a را چنان معین کنید که حد $\frac{(x-a)^2}{(1+\cos\frac{\pi}{a}x)}$ وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند برابر $\frac{2}{\pi^2}$ باشد.

حد توابع زیر را درصورتی‌که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند به‌دست آورید.

۲۷– $f:x \longmapsto \frac{x^4 - 5x + 1}{x^2 + 2}$

۲۸– $f:x \longmapsto \frac{x^8 + 2x - 5}{x^8 - 7}$

۲۹– $f:x \longmapsto \frac{x^3 - 7x + 1}{3x^2 - 4}$

۳۰– $f:x \longmapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

۳۱– $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

۳۲– $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+x} - x$

۳۳– $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+ax+b} - x$

۳۴– $f:x \longmapsto \sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+4}$

۳۵– $f:x \longmapsto \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$

۳۶– $f:x \longmapsto \frac{x - \sqrt{x^2+x+1}}{2x - \sqrt{4x^2+x}}$

۳۷– $f:x \longmapsto \sqrt{x^4+x-2} - (x^2-1)$

۳۸– a و b را چنان معین کنید که $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b) = 0$ باشد

حد راست یا چپ: توابع زیررا از روی تعریف ثابت کنید.

۳۹– $\lim\limits_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

۴۰– $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{x^3+8}{|x+2|} = 12$

۴۱– $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{x^3+8}{|x+2|} = -12$

۴۲– $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$

۴۳ $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-x}{x-1} = +\infty$

۲-۲۲- پیوستگی تابع در یك نقطه

موضوع پیوستگی تابع را درسال سوم دیده‌اید. اینك آن را یادآوری می‌کنیم.

تعریف- تابع f را در نقطهٔ x_0 پیوسته گویند هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱- f در x_0 تعریف شده باشد یا به‌عبارت دیگر $x_0 \in D_f$

۲- وقتی x به سمت x_0 میل کند تابع f حدداشته باشد.

۳- این حد برابر مقدار تابع در x_0 باشد یعنی $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

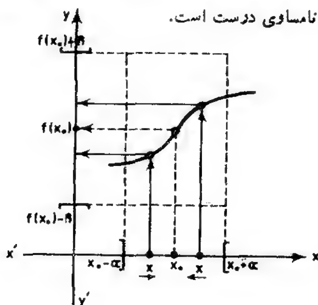
تذکر: با توجه به تعریف حد می‌توان تعریف پیوستگی را برحسب نمادهای α و β چنین بیان داشت:

$$\forall \beta > 0 \; \exists \alpha > 0 , \; |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \beta$$

توجه کنید که دراینجا شرط $0 < |x - x_0|$ حذف شده است زیرا:

اولاً: f در x_0 تعریف شده است.

ثانیاً: طرف دوم استلزام فوق به ازای $x = x_0$ به صورت $|f(x_0) - f(x_0)| < \beta$ در می‌آید که یك نامساوی درست است.



مثال ۱ - پیوستگی تابع $x \xrightarrow{f} f(x) = x^2 - 2x + 3$ را درنقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید.

حل: اولاً- دامنه تعریف $D_f = R$ و $x_0 = 2 \in D_f$

ثانیاً- $f(x_0) = f(2) = 3$

ثالثاً- $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 2x + 3) = 2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3$

چون $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$ می‌باشد تابع درنقطهٔ $x_0 = 2$ پیوسته است.

مثال۲ـ پیوستگی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x)=\begin{cases} x^{2}+1 & x\leqslant 0 \\ 1+x & x>0 \end{cases}$ را در نقطه $x_{0}=0$ بررسی کنید.

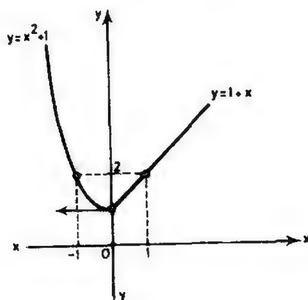
حل: اولاً ـ دامنهٔ تعریف $D_f=R$ و $x_0=0\in D_f$

ثانیاً ـ $f(x_0)=f(0)=0^{2}+1=1$

ثالثاً ـ $\underset{x\to 0^{+}}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^{+}}{\text{حد}}(1+x)=1$

$\underset{x\to 0^{-}}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^{-}}{\text{حد}}(x^{2}+1)=1$

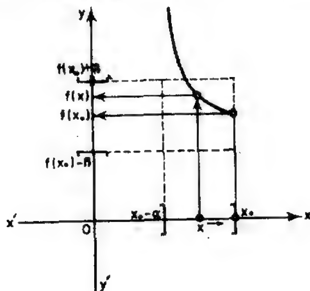
چون $\underset{x\to 0^{-}}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to 0^{+}}{\text{حد}} f(x)=f(0)=1$ است تابع درنقطهٔ $x_0=0$ پیوسته است.



I- پیوستگی چپ

تعریف ـ تابع f که روی $]a, x_0]$ و $a<x_0$ معین است. درنقطهٔ x_0 پیوستگی چپ‌دارد هرگاه، وقتی که x ازسمت چپ به سمت x_0 میل می‌کند. حدتابع برابر $f(x_0)$ باشد، یعنی :

$$\underset{x\to x_0^{-}}{\text{حد}} f(x)=f(x_0)$$

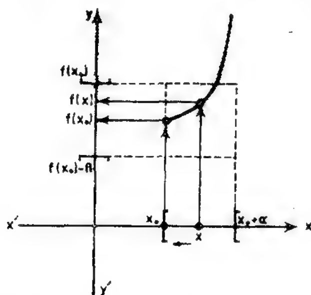


II- پیوستگی راست

تعریف- تابع f که روی $[x_0 ، b[$ ، $x_0 < b$ معین است. در نقطه x_0 پیوستگی راست دارد هرگاه، وقتی که x ازسمت راست به‌سمت x_0 میل می‌کند، حد تابع برابر $f(x_0)$ باشدیعنی:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

حد



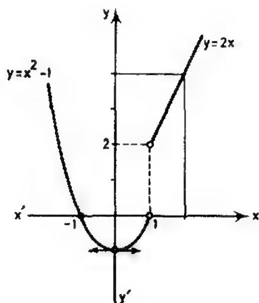
تذکر: اگر تابعی دریك نقطه پیوسته نباشد آن راگسسته یامنفصل گویند.

۲-۲۳- حالتهای انفصال (یا ناپیوستگی)

الف- وقتی‌که تابع درنقطهٔ x_0 معین نیست.

مثال ۱- تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ در نقطهٔ $x_0 = 0$ پیوسته نیست زیرا $f(0)$ تعریف نشده‌است.

مثال ۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$، هم‌در نقطه $x_0 = 1$ پیوسته نیست زیرا $f(1)$ تعریف نشده است.



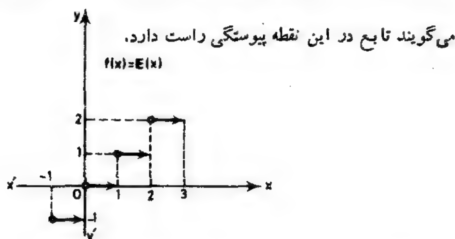
ب- تابع در نقطه x_0 حد ندارد یا دارای حد چپ و راست متمایز است.

مثال ۱- تابع پله‌ای $f(x) = E(x)$ در نقطه به طول عدد درست n ، $x_0 = n \in Z$ گسسته است زیرا:

$$f(x_0) = f(n) = n$$

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = n \quad , \quad \lim_{x \to n^-} f(x) = n - 1$$

حد چپ و راست تابع دراین نقطه ازهم متمایزند ولی چون $\lim_{x \to n^+} f(x) = f(n) = n$ است می‌گویند تابع در این نقطه پیوستگی راست دارد.



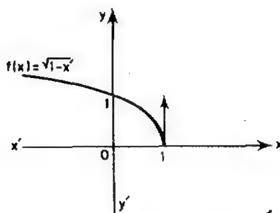
مثال ۲- تابع $f(x) = \sqrt{1 - x}$ در نقطهٔ $x_0 = 1$ پیوستگی چپ دارد. زیرا:

$$x_0 = 1 \in D_f \text{ و } D_f =]-\infty, 1]$$

$$f(x_0) = f(1) = 0$$

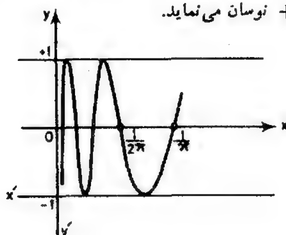
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x} = 0$$

این تابع حد راست ندارد زیرا x نمی‌تواند از مقادیر بیشتر ازیك به‌سمت‌یك میل کند در نتیجه $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0 = f(1)$ بوده و تابع درنقطهٔ $x_0 = 1$ پیوستگی چپ دارد.



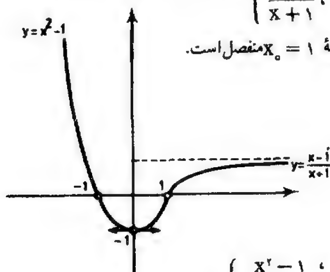
مثال۳- تابع $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$ ، درنقطه $x_0 = 0$ پیوسته نیست. زیرا وقتی‌که x بامقادیر

بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می کند $\infty + \leftarrow \frac{1}{x}$ و ... $\sin \frac{1}{x}$ بدون اینکه به‌سمت حدی میل کند بین ۱ − و ۱ + نوسان می‌نماید.

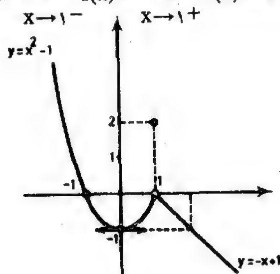


ج- تابع در نقطهٔ x_0 حد دارد ولی $f(x_0)$ یا معین نیست یا برابر باحد مزبور نیست.

مثال ۱- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ \ ، \ x < ۱ \\ \frac{x - ۱}{x + ۱} \ ، \ x > ۱ \end{cases}$، در نقطه $x_0 = ۱$ حد دارد ولی $f(۱)$ تعریف نشده است پس تابع در نقطهٔ $x_0 = ۱$ منفصل‌است.



مثال ۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ \ ، \ x < ۱ \\ -x + ۱ \ ، \ x > ۱ \\ ۲ \ ، \ x = ۱ \end{cases}$ در نقطهٔ $x_0 = ۱$ حد داردولی‌با $f(۱) = ۲$ برابر نیست $\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} f(x) = ۰ \neq f(۱) = ۲$ ، درنتیجه تابع درنقطهٔ $x_0 = ۱$ منفصل است.



۲-۲۴- قضایای پیوستگی

قضیهٔ اول- اگر f و g در x_0 پیوسته باشند $f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ دوم- اگر f در x_0 پیوسته باشد، λf نیز در x_0 پیوسته است $(\forall \lambda \in R)$.

قضیهٔ سوم- اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، تابع $f.g$ نیز در x_0 پیوسته است و اگر $g(x) \neq 0$ باشد، $\frac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته است.

نتیجه- تابع $f(x) = x$ درهر نقطه پیوسته‌است ، بنا برقضیه(۳)تابع $g(x) = x^n$ (n نامنفی است) نیز چنین است. از این‌رو بااستفاده ازخاصیت‌های (۱) و(۲) می‌توان گفت که هر تابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

پیوسته است.

به همین ترتیب می‌توان گفت که هر تابع کسری گویای $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ روی دامنهٔ تعریف یعنی برای $Q(x) \neq 0$ پیوسته است.

توابع قدر مطلق و $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ درتمام نقاط دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند.

قضیهٔ چهارم- اگر f در نقطه x_0 پیوسته و درهمسایگی آن مثبت باشد، $\sqrt{f}$ نیز در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ پنجم- اگر f درنقطه x_0 و g در نقطهٔ $y_0 = f(x_0)$ پیوسته باشند، تابع مرکب $h = gof$ در x_0 پیوسته است.

نتیجه- با استفاده ازمطالب بالا، ممکن است بررسی پیوستگی یك تابع دلخواه f را به بررسی پیوستگی توابع مقدماتی (مثل‌تابع توان، تابع مثلثاتی،...) که f با استفاده ازآنها ساخته می‌شود، برگردانیم. برای مثال تابع $f : x \longrightarrow \sin(\omega x + \varphi)$ پیوسته است، زیرا ترکیب دو تابع پیوسته زیر می‌باشد.

$$x \longmapsto (\omega x + \varphi) \longrightarrow \sin(\omega x + \varphi)$$

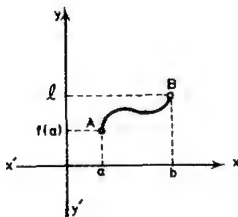
۲-۲۵- پیوستگی تابع در یك فاصله

تعریف ۱- تابع f را درفاصله $]a, b[$ یا $]a, +\infty[$ پیوسته گویند درصورتیکه بازای هر نقطه به‌طول x_0 متعلق به‌این فاصله پیوسته باشد.

تعریف ۲- تابع f را درفاصله $[a, b[$ ، $a < b$ پیوسته گویند. درصورتیکه:

الف: در فاصله $]a, b[$ پیوسته باشد.

ب: در نقطه بطول $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.



نقطهٔ $A(a و f(a))$ که متعلق به‌نمودار تابع است به‌نقطهٔ توقف موسوم‌است.
نقطهٔ $B(b و \ell)$ که به‌نمودار تابع تعلق ندارد به‌نقطه حد موسوم است .

تعریف ۳ـ تابع f را در فاصله $a<b$ و $]a و b]$ پیوسته گویند در صورتیکه :

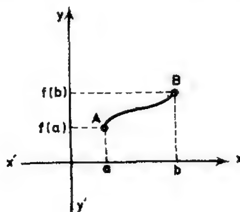
الف ـ در فاصله باز $]a و b[$ پیوسته باشد

ب ـ در نقطه بطول $x = b$ پیوستگی داشته باشد .

تعریف ۴ـ تابع f را درفاصله $a<b$ و $[a و b]$ پیوسته گویند درصورتی که:

الف ـ در فاصله باز $]a و b[$ پیوسته باشد.

ب ـ در نقطهٔ به‌طول a پیوستگی راست و درنقطه‌به‌طول $x = b$ پیوستگی چپ داشته‌باشد.



نقاط به مختصات $A\Big\vert_{f(a)}^{a}$ ، $B\Big\vert_{f(b)}^{b}$ را نقاط توقف نمودار تابع می‌گویند.

قضیه ـ اگر تابع f روی $[a و b]$ پیوسته ویکنوا باشد. معکوس‌پذیر است وتابع معکوس آن f^{-1} نیز روی $[f(a) و f(b)]$ پیوسته ویکنواست (این قضیه را بدون اثبات می‌پذیریم).

مثال ۱ـ تابع $f(x)=x^3$ روی R پیوسته‌ویکنواست پس‌تابع معکوس‌آن $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ نیز روی R پیوسته ویکنواست.

مثال ۲ـ تابع $y=\cos x$ در فاصله $[0 , \pi]$ پیوسته و یکنواست تابع معکوس‌آن:

$x=\mathrm{Arc}\cos y$ یا $y=\mathrm{Arc}\cos x$ نیز درفاصلهٔ $[-1 , +1]$ نیز پیوسته ویکنواست.

مثال ۳ـ با استفاده از قضایای پیوستگی، پیوستگی هریك ازتوابع زیر را در طـول دامنهٔ تعریفشان بررسی کنید.

الف ـ $f(x)=x^5+2x^3$

ب ـ $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-1}$

ج ـ $f(x)=x+1+\dfrac{x-3}{x^2-4}$

د ـ $f(x)=\sqrt{x}(x^3+1)$

هـ ـ $f(x)=x+\sqrt{x^2}$

و ـ $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x}}$

حل:

الف ـ f یك‌تابع چند جمله‌ای است که روی R معین وپیوسته است.

ب ـ f یك تابع خارج قسمت است که روی دامنه تعریفش $D_f=R-\{1 , -1\}$ پیوسته است.

ج ـ تابع $x\overset{h}{\longmapsto}h(x)=x+1$ روی R پیوسته است و

$x\overset{g}{\longrightarrow}g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$ روی $D_g=R-\{2 , -2\}$ پیوسته است. درنتیجه تابع f روی $D_f=D_h\cap D_g=R-\{2 , -2\}$ پیوسته است زیرا از مجموع دوتابع پیوسته تشکیل شده است.

د ـ تابع $x\overset{h}{\longmapsto}h(x)=\sqrt{x}$ روی $D_h=[0 , +\infty[$ پیوسته است تابع $x\overset{g}{\longrightarrow}g(x)=x^3+1$ هم روی $D_g=R$ پیوسته است در نتیجه تابع f روی $D_f=D_h\cap D_g=[0 , +\infty[$ پیوسته است زیـرا از حـاصلضرب دو تابـع پیوسته روی $D_f=[0 , +\infty[$ تشکیل شده است. (تابع f درنقطه‌ای بطول $x=0$ فقط پیوستگـی راست دارد زیرا سمت چپ $x=0$ تابع‌تعریف نشده است.)

هـ ـ تابع قدر مطلق $x \overset{h}{\longmapsto} h(x)=|x|$ روی $D_h=R$ پیوسته است و تابع $x \overset{g}{\longrightarrow} g(x)=x$ هم روی $D_f=R$ پیوسته است در نتیجه تابع f روی $D_f=R$ پیوسته‌است زیرا از مجموع دو تابع پیوسته تشکیل شده است.

و ـ تابع قدر مطلق $x \overset{h}{\longmapsto} h(x)=|x|$ روی $D_h=R$ پیوسته است و تابع $x \overset{g}{\longmapsto} g(x)=\sqrt{x}$ هم روی $D_g=[\circ \; و \; +\infty[$ پیوسته است و می‌دانیم خارج قسمت دو تابع پیوسته وقتی پیوسته است که $g(x)\neq\circ$ در نتیجه تابع f روی ،
$D_f=D_h\cap D_g-\{g(x)=\circ\}=]\circ \; و \; +\infty[$ پیوسته خواهد بود.

تمرین

الف- پیوستگی: مسائل زیررا با مراجعه به‌تعریف شماره ۲ـ۲۲ (بدون استفاده از بحث α و β) حل کنید.

۱ـ نشان دهید که تابع $f:x\longrightarrow\frac{x+۳}{x-۲}$ در نقطهٔ $x_\circ=۱$ پیوسته است.

۲ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto x^۳+۲x-۳$ درنقطهٔ $x_\circ=۲$ پیوسته‌است.

۳ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto\frac{۲}{(x+۱)^۲}$ در نقطهٔ $x_\circ=\circ$ پیوسته است.

۴ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto\frac{x^۲+x+۱}{x-۱}$ در نقطهٔ $x_\circ=۲$ پیوسته است.

۵ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto(x-۱)(x+۵)$ در نقطهٔ $x_\circ=۱$ پیوسته است.

۶ـ نشان دهید که تابع $f:x\longmapsto\sqrt{۱+x}$ در نقطهٔ $x_\circ=۲$ پیوسته است.

۷ـ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده‌است:

$$f(x)=\begin{cases}|x-۲| & x\neq۲ \text{ اگر}\\ ۱ & x=۲ \text{ اگر}\end{cases}$$

پیوستگی تابع f را در نقطهٔ $x_\circ=۲$ بررسی کنید. آیا درنقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۸- تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & x<0 \quad \text{اگر} \\ x^2 & x\geqslant 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

پیوستگی تابع f در نقطهٔ $x_0 = 0$ را بررسی‌کنید. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی‌راست یا چپ دارد؟

۹- تابع f به‌وسیلهٔ دستورزیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2 , & x>1 \quad \text{اگر} \\ 2x-2 , & x<1 \quad \text{اگر} \\ 0 , & x=1 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۱۰- تابع f به‌وسیلهٔ دستور $f(x) = 3x + \frac{|2x|}{x}$ و $f(0) = 2$ داده شده است پیوستگی آنرا در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی‌کرده ونمودار آنرا درصفحهٔ محورهای قائم رسم کنید.

۱۱- همان سؤال مسئله ۱۰ برای تابع g بادستور: $g(x) = 3x + \frac{|2x|}{|x|}$

۱۲- تابع f بادستور زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & x\neq 1 \quad \text{اگر} \\ 2 & x=1 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

پیوستگی تابع‌رادرنقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کرده ونمودارآن را درصفحهٔ مختصات قائم‌رسم‌کنید.

۱۳- تابع $f: x \longmapsto f(x) = (x-[x])$ که درآن $[x]$ بزرگترین عدددرست‌کوچکتر یا مساوی x است مفروض است:

پیوستگی این تابع را در فاصله $]2و3[$ بررسی کنید ودر فاصلهٔ $[3 و -3]$ نمودار آن را رسم کنید.

۱۴- همان سؤال برای تابع :

$$f: x \longmapsto \frac{x}{1+[x]}$$

۱۵ـ همان سؤال برای تابع :

$$f: x \overset{f}{\longmapsto} [x] + [-x]$$

۱۶ـ تحقیق کنید که آیا تابع زیر در $x_0 = 0$ پیوسته است؟

$$x \overset{f}{\longmapsto} \begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ ،} \\ f(0) = 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

۱۷ـ پیوستگی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ را درنقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید.

۱۸ـ تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{،} \ x \leqslant 0 \\ x + 2 & \text{،} \ x > 0 \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

۱۹ـ تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ ،} \\ 1 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع را درنقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

۲۰ـ نشان دهید تابع $x \overset{h}{\longmapsto} h(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ در نقطه $x_0 = \pi$ پیوسته است.

۲۱ـ نشان دهید تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x + E(x)$ در فاصله $]2, 3[$ پیوسته است.

۲۲ـ نشان دهیدتابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = xE(x)$ در فاصلهٔ $]2, 3[$ پیوسته‌است.

۲۳ـ تابع $x \overset{g}{\longmapsto} \begin{cases} g(x) = x\sqrt[3]{1 - x} & \text{و } x \leqslant 1 \\ g(x) = \sqrt{x - 1} & \text{و } x \geqslant 1 \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع‌را درنقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کنید ونشان دهید که‌تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{x - 1}$ روی دامنهٔ تعریفش پیوسته است سپس f^{-1} را بدست آورید.

۲۴- تابع f در R با ضابطهٔ

$$\begin{cases} f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

مفروض است.

الف- حد $f(x)$ وقتی که x به‌سمت صفر میل می‌کند چقدر است.

ب- نشان دهید که f در $x_0 = 0$ پیوسته است.

ج- نشان دهید که f روی R پیوسته است.

ه - نشان دهید که تابع معکوس f برابر است با: $f^{-1}(x)=x|x|$.

فصل ۳

توابع مشتق پذیر

الف ـ مشتق

۳-۱ـ مشتق دریك نقطه

فرض می‌کنیم تابع f روی [a و b] معین و درنقطه $x_\circ \in [a \text{ و } b]$ پیوسته باشد.

می‌گویند تابع f درنقطه $x_\circ$ مشتق پذیر است، اگر نسبت $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ وقتی که x به سمت $x_\circ$ میل می‌کند، دارای یك‌حد باشد. این‌حد را مشتق تابع f در $x_\circ$ می‌گویند و به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$f'(x_\circ) = \underset{x \to x_\circ}{\text{حد}} \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x_\circ = ۱$ عبارت است از:

$$\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \frac{\sqrt{x}-۱}{x-۱} = \frac{۱}{\sqrt{x}+۱}$$

$$f'(۱) = \underset{x \to ۱}{\text{حد}} \frac{f(x)-f(۱)}{x-۱} = \underset{x \to ۱}{\text{حد}} \frac{۱}{\sqrt{x}+۱} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین داریم:

$$f'(۱) = \frac{۱}{۲}$$

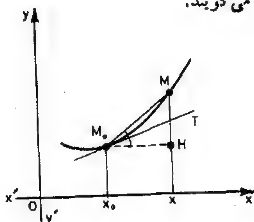
۳-۲ـ تعبیر هندسی مشتق

اگر $M_\circ(x_\circ \text{ و } f(x_\circ))$ یك نقطه منحنی نمایش تابع f باشد می‌دانیم که نسبت $\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$ نمایش ضریب زاویه وتر $M_\circ M$ است که $M(x \text{ و } f(x))$ نقطه‌ای نزدیك به $M_\circ$ است اگر $x \to x_\circ$ آنگاه $f(x) \to f(x_\circ)$ زیرا f درنقطه $M_\circ$ پیوسته است. حد نقطه M، نقطه $M_\circ$ است در این صورت حد وتر $M_\circ M$ مماس $M_\circ T$ است.

بنا براین تعبیرهندسی مشتق تابع درنقطه x_0، برا برضریب‌زاویه خط‌مماس در x_0 است.یعنی :

$m=f'(x_0)$ ضریب زاویه خط مماس در نقطه x_0

به $f'(x_0)$ عدد مشتق در x_0 می گویند.



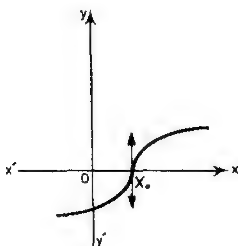
۳-۳- نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد

چندین حالت است که تابع f در x_0 مشتق پذیر نیست.

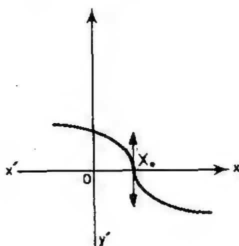
I- وقتی که عدد مشتق در x_0 بینهایت است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty \text{ یا } -\infty$$

، دراین صورت تابع f در x_0 مشتق ندارد ومماس برمنحنی دراین نقطه موازی محورyهاست.



a) $\lim_{x\to x_0} f'(x)=+\infty$



b) $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$

مثال: تابع $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ در نقطه $x_0=1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty$$

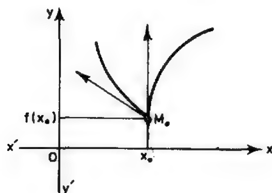
II- وقتی که عدد مشتق راست در نقطه $x_\circ$ با عدد مشتق چپ در این نقطه مساوی نیستند یعنی $l \neq l'$. مشتق راست در نقطه $x_\circ$ عبارت است از:

$$\underset{x \to x_\circ +}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = l$$

مشتق چپ در نقطه $x_\circ$ عبارت است از:

$$\underset{x \to x_\circ -}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = l'$$

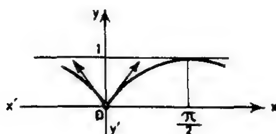
الف: اگر l و l' بینهایت نباشند. منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه $x_\circ$ دارای دو نیم مماس است. نیم مماس راست و نیم مماس چپ در این جا نقطه $x_\circ$ را نقطه زاویه‌دار می‌نامند



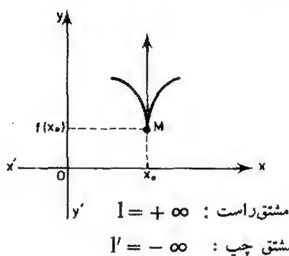
مثال: تابع $f(x) = |\sin x|$ درنقطه $x_\circ = \circ$ مشتق پذیر نیست، زیرا :

$$\underset{x \to \circ +}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \underset{x \to \circ +}{\text{حد}} \frac{\sin x - \circ}{x - \circ} = 1$$

$$\underset{x \to \circ -}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \underset{x \to \circ -}{\text{حد}} \frac{-\sin x - \circ}{x - \circ} = -1$$

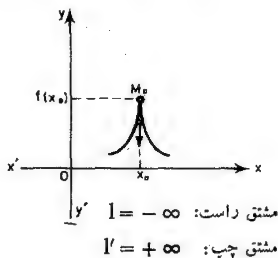


ب: اگر l و l' بینهایت باشند منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه x_0 دارای مماسی موازی محور yهاست مانند شکل‌های زیر. نقطه M_0 را نقطه بازگشت منحنی می‌گویند.



مشتق‌راست : $l = +\infty$

مشتق چپ : $l' = -\infty$



مشتق راست: $l = -\infty$

مشتق چپ: $l' = +\infty$

مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ در نقطه $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست، زیرا:

$$l = \underset{x\to 0+}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underset{x\to 0+}{\text{حد}} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - 0}{x - 0} =$$

$$\underset{x\to 0+}{\text{حد}} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = -\infty$$

$$l' = \underset{x\to 0-}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \underset{x\to 0-}{\text{حد}} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x} - 0}{x - 0} =$$

$$\underset{x\to 0-}{\text{حد}} \sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = +\infty$$

در این صورت نقطه$M_0(0, f(0))$ را نقطه‌بازگشت نمودار تابع f می‌نامند

III ـ وقتی که نسبت $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ حد ندارد (حد آن نه یك عدد محدود است و نـه بینهایت و حد چپ و راست هم ندارد).

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست

زیرا $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$، حد

وجود ندارد.

قضیه ـ اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد، f درنقطه x_0 پیوسته است.

(عکس این قضیه درست نیست یعنی ممکن است که تابع دریك نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیرنباشد).

۳ـ۴ـ مشتق روی يك فاصله ـ تابع مشتق

تعریف ـ می‌گوئیم تابع f روی [a و b] مشتق پذیر است، هرگاه:

اولا: $f'(x_0)$ برای هر $x_0 \in]a$ و $b[$ وجود داشته باشد.

ثانیاً: f در a از طرف راست و در b ازطرف چپ مشتق‌پذیر باشد.

در این صورت می‌توان تابع مشتق را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f' : [a \text{ و } b] \longmapsto R$$
$$x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x)$$

مثال: تابع $f(x) = \sin x$ روی [۰ و ۲π] مشتق‌پذیر است وتابع مشتق آن عبارت‌است از $f'(x) = \cos x$ زیرا

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} =$$

$$\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \times \cos\frac{x+x_0}{2}$$

درحد، جمله اول این حاصلضرب به‌سمت يك میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\forall x_0 \in [0 \text{ و } 2\pi] \text{ ، } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \cos x_0$$

۳ـ۵ـ محاسبه مشتق

چون طریقه به دست‌آوردن مشتقهای توابع مقدماتی را در کلاس سوم خوانده‌اید ازذکرآن خودداری می‌کنیم.

۳-۶- چند عمل روی تابعهای مشتق پذیر

فرض کنیم f و g دو تابع مشتق پذیر روی [a و b] باشند.

قضیه ۱- مجموع دوتابع مشتق‌پذیر یك تابع مشتق پذیر است وداریم:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

قضیه ۲- اگر f مشتق پذیر و $\lambda \in R$ باشد λf مشتق پذیر است و داریم

$$(\lambda f)' = \lambda . f'$$

قضیه ۳- حاصلضرب دو تابع مشتق پذیر، یك تابع مشتق پذیر است وداریم :

$$(fg)' = f'g + g'f$$

نتیجه: توان n ام یك تابع مشتق پذیر، یك تابع مشتق پذیر است وداریم:

$$(f^n)' = nf^{n-۱} \times f'$$

قضیه ۴- اگر f و g مشتق‌پذیر باشند، تابع $\frac{f}{g}$ نیز، هر جا که $g(x) \neq ۰$ باشد، مشتق‌پذیر است و داریم :

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^۲}$$

قضیه ۵- ترکیب دو تابع مشتق پذیر f و g یك تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(gof)'(x) = g'(y) \times f'(x) \quad ، y = f(x)$$

برای اثبات نمودار زیر را درنظر می گیریم:



از آنجاکه f در $x_۰$ مشتق‌پذیر است داریم:

$$\lim_{x \to x_۰} \frac{f(x) - f(x_۰)}{x - x_۰} = f'(x_۰)$$

(حد)

و چون g در $y_۰$ مشتق‌پذیر است داریم:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

واز طرف دیگر بنابر تعریف مشتق داریم:

$$(gof)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(gof)(x) - (gof)(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \times \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

با توجه به $y = f(x)$ داریم:

$$(gof)'(x_0) = g'(y_0) \times f'(x_0)$$

یا بطورکلی داریم: $\boxed{(gof)'(x) = g'(y) \times f'(x) \quad ، \quad y = f(x)}$ وهمچنین

$$\boxed{(fog)'(x) = f'(y) \times g'(x) \quad ، \quad y = g(x)}$$

مثال ۱- تابع‌های f و g باضابطه‌های $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ و $g(x) = x^4 - 1$ داده شده‌اند مشتق تابع gof را تعیین‌کنید و حاصل مشتق را به ازای $x = 3$ بدست‌آورید.

حل:

$$(gof)'(x) = g'(y) \times f'(x) \quad ، \quad y = f(x)$$

$$g(x) = x^4 - 1 \qquad g'(y) = 4y^3$$

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \qquad f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

$$(gof)'(x) = 4y^3 \times \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}$$

$$(gof)'(x) = 4(x^2 - 1) \times \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} = \frac{8}{3} x \sqrt[3]{(x^2 - 1)}$$

$$(gof)'(3) = \frac{8}{3} \times 3 \sqrt[3]{9 - 1} = 16$$

مثال ۲ـ تابعهای $y=f(x)=\sqrt{2x+1}$ و $z=g(y)=\frac{3y-1}{y}$ داده شده‌اند. مشتق z را نسبت به x تعیین و به‌ازای $x=0$ آنرا حساب کنید.

$z=(gof)(x)$

$z'_x=z'_y\times y'_x=g'_y\times f'_x$ و

$y'_x=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ و

$z'_y=\frac{1}{y^2}$ $\quad z'_x=\frac{1}{y^2}\times\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$ و $z'(0)=1$

مثال ۳ـ تابعهای f و g با ضابطه‌های $f(x)=-3x+2$ و $g(x)=1-x^2$ داده شده‌اند.

الف ـ مشتق تابعهای $Z=(gof)(x)$ و $T=(fog)(x)$ راتعیین وبه‌ازای $x=1$ مقدار هریك را حساب کنید.

ب ـ تابعهای مرکب $Z=(gof)(x)$ و $T=(fog)(x)$ راتعیین وبا تعیین مشتق هرکدام درستی فرض الف راکه حل کرده‌اید امتحان کنید.

حل ـ الف:

$Z=(gof)(x)$ ، $Z'_x=g'_y\times f'_x$ ، $y=f(x)$

$f(x)=-3x+2$ ، $f'_x=-3$

$g(y)=1-y^2$ ، $g'_y=-2y$

$Z'_x=-2y\times -3=6y=6(-3x+2)$

$\boxed{Z'(1)=-6}$

$T=(fog)(x)$ ، $T'_x=f'_y\times g'_x$ ، $y=g(x)$

$g(x)=1-x^2$ ، $g'_x=-2x$

$f(y)=-3y+2$ ، $f'_y=-3$

$T'_x=-3\times -2x=6x$

$\boxed{T'(1)=6}$

حل ـ ب:

$Z=(gof)(x)=g[f(x)]=1-(-3x+2)^2=-9x^2+12x-3$

$\boxed{Z'_x=-18x+12}$ ، $\boxed{Z'(1)=-6}$

$T=(fog)(x)=f[g(x)]=-3(1-x^2)+2=3x^2-1$

$\boxed{T'_x=6x}$ ، $\boxed{T'(1)=6}$

تمرین

۱ـ مشتق پذیری تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید.

۲ـ تابع f در R باضابطهٔ $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & , x \geqslant 1 \\ \sqrt{1-x} & , x \leqslant 1 \end{cases}$ مفروض است.

اولا: مشتق پذیری تابع f را درنقطه $x = 1$ بررسی کنید.

ثانیاً: مشتق تابع را حساب کنید.

۳ـ مشتق پذیری تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{(x-1)^2(x+2)}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۴ـ مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 2x|$ را درنقطه $x_0 = 2$ بررسی کنید.

۵ـ دوتابع f و g به‌ترتیب زیر تعریف شده‌اند:

$$f(x) = \frac{1}{2x-3} \quad \text{و} \quad g(x) = 3x^2 - 2$$

الف ـ هریك ازتابعهای: fog و gofرا تعیین کنید.

ب ـ مشتق آنها راهم مستقیماً وهم با استفاده‌از فرض الف تعیین کنید.

۶ـ تابعهای f و g به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad \text{و} \quad g(x) = x^2 - x$$

مشتق هریك از تابعهای fog و gof را تعیین کنید.

۷ـ مشتق تابع $n \in N$ و $f(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ را حساب کنید و از آنجا حاصل جمع زیر رامعین کنید.

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

۸ـ به‌فرض اینکه تابع f مشتق داشته باشد، مشتق اول ودوم هـر یك ازتابعهای $f(x^3)$ و $f(x^2)$ و $f(\frac{1}{x})$ را حساب کنید.

۹ـ توابع $f(t) = \sqrt{2t^2 + 1}$ و $g(t) = t^3 + 1$ داده شده‌اند.

مطلوبست تعیین تابعهای fog و gof وسپس مشتق هریك ازآنها را به ازای $t = 1$ حساب کنید.

۱۰- دوتابع $f(x)=-3x+2$ و $g(y)=-2y^2+y$ داده شده‌اند.
مطلوبست تابعهای gof و fog و محاسبهٔ مشتق هریك.
۱۱- دو تابع h و T به‌صورتهای زیر داده شده‌اند.

$$h(x)=\sin 2x+\cos 2x+1 \quad \text{و} \quad T(x)=4x-\frac{\pi}{3}$$

الف- مطلوبست تعیین تابعهای: hoT و Toh

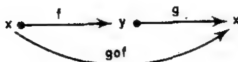
ب- مشتق هریك از این دو تابع مرکب را تعیین وحاصل هریك را به‌ازای $x=\frac{\pi}{12}$ رادیان تعیین کنید.

۳-۷- مشتق تابع معکوس

قضیه ۶- هرگاه تابع $y=f(x)$ روی $[a \text{ و } b]$ معکوس‌پذیر[1] با مشتق مخالف‌صفر باشد. تابع $x=g(y)$ معکوس آن روی $[f(a) \text{ و } f(b)]$ مشتق‌پذیر است وداریم:

$$\boxed{g'(y)=\frac{1}{f'(x)}} \quad ، \quad x=g(y)$$

برای اثبات طرح زیر را درنظر می‌گیریم.



$$(gof)(x)=x$$

از طرفین باتوجه بمشتق ترکیب توابع، مشتق می‌گیریم.

$$(g'of)(x)\times f'(x)=1 \quad ، \quad g'of(x)=g'[f(x)]=g'(y)$$

$$g'(y)\times f'(x)=1$$

$$(1) \quad \boxed{g'(y)=\frac{1}{f'(x)}} \quad ، \quad x=g(y)$$

یعنی مشتق تابع معکوس، برابرعکس مشتق تابع است ویا

$$(2) \quad \boxed{f'(x)=\frac{1}{g'(y)}} \quad ، \quad y=f(x)$$

۱- تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a \text{ و } b]$ وقتی معکوس پذیر است که در این فاصله پیوسته و یکنوا باشد.

اگر نماد $\frac{dy}{dx}$ را برای مشتق y نسبت به x (یعنی $f'(x)$) ونماد $\frac{dx}{dy}$ رابرای‌مشتقx‌نسبت به y(یعنی $g'(y)$) به‌کار بریم رابطهٔ (۱) و (۲) رامی‌توان به‌صورتهای زیر نوشت:

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad ، \quad y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

از طرفی اگر تابع معکوس f را به f^{-1} نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم .

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \quad \text{یا} \quad f' = \frac{1}{(f^{-1})'}$$

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}}$$

مثال ۱ـ تابع f به صورت زیر داده شده است :

$$y = f(x) = \mathrm{Arc}\sin x \qquad x \in [-1 \text{ و } 1] \qquad y \in [-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}]$$

الف‌ـ مشتق تابع فوق را به‌کمك مشتق تابع معکوس تعیین کنید.

ب‌ـ معادلهٔ تابع معکوس را بنویسید ودومنحنی را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل‌ـ الف: تابع داده شده‌درفاصلهٔ [۱ و ۱ −] پیوسته‌وصعودی است پس‌معکوس دارد و تابع معکوس‌آن $x = \sin y$ است که درآن y متغیر مستقل و x متغیر تابع است یعنی :

$$x = \sin y \qquad y \in [-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}] \qquad x \in [-1 \text{ و } 1]$$

$$x' = \cos y$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y}$$

با فرض $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ، چون $\cos y$ مثبت است بنابراین:

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

ودرنتیجه ؛ $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ یعنی:

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arc}\sin x \\ y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ و } x \neq \pm 1 \end{cases}$$

دستور f:

$$y = \mathrm{Arc}\sin x \quad ، \quad -۱ \leqslant x \leqslant ۱ \quad \text{و} \quad \frac{-\pi}{۲} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

دستور $f^{-۱}$:

$$y = \sin x \quad ، \quad \frac{-\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲} \quad \text{و} \quad -۱ \leqslant y \leqslant ۱$$

سه نقطه از تابع اول:

$$A(-۱ \text{ و } \frac{-\pi}{۲}) \text{ و } O(۰ \text{ و } ۰) \text{ و } B(۱ \text{ و } \frac{\pi}{۲})$$

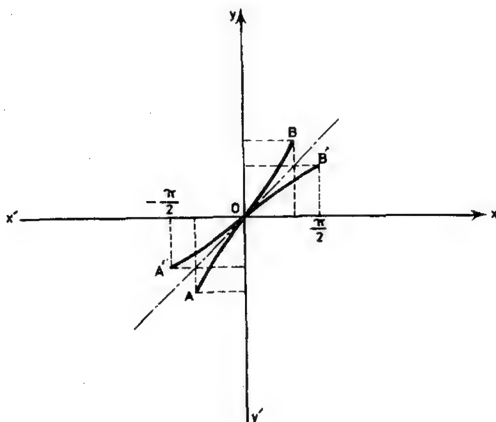
نقطه‌های متناظر از تابع دوم:

$$A'(-\frac{\pi}{۲} \text{ و } -۱) \text{ و } O(۰ \text{ و } ۰) \text{ و } B'(\frac{\pi}{۲} \text{ و } ۱)$$

منحنی AOB نمودار $y = \mathrm{Arc}\sin x$

منحنی A'OB' نمودار $y = \sin x$

دو منحنی نسبت به‌نیمساز ربع اول وسوم قرینه و درمبدأ مختصات برهم ممـاس و مماس مشترکشان نیمساز ربع اول و سوم است.



مثال۲- تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ با شرط $x\geqslant ۰$ مفروض‌است. تابع معکوس f رانوشته و صحت تساوی $(f^{-۱})'=\frac{۱}{f'}$ را در نقاطی که $f'(x)\neq ۰$ تحقیق کنید.

حل- دستور تابع $f^{-۱}$ ازروی دستور f چنین‌است: $f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}$ دامنهٔ تعریف و برد f یعنی فاصله‌های $[۰ و \infty]$ و $[۱ و \infty]$ به ترتیب برد و دامنهٔ تعریف $f^{-۱}$ خواهندبود ازهر دو تابع مشتق میگیریم.

$$f(x)=x^{۲}+۱ \implies f'_x=۲x$$

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱} \implies (f^{-۱}(x))'=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}$$

$$(f^{-۱}(y))'=\frac{۱}{۲\sqrt{y-۱}}=\frac{۱}{۲\sqrt{(x^{۲}+۱)-۱}}=\frac{۱}{۲|x|}=\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{f'(x)} \text{ و } x>۰$$

یعنی :

$$(f^{-۱})'=\frac{۱}{f'} \quad \text{یا} \quad f'.(f^{-۱})'=۱ \text{ و } x>۰$$

مثال۳- تابع $y=x^{۳}$ مفروض است.

الف: از نقطهٔ B به‌طول ۲ واقع برمنحنی (C) نمایش تابع فوق خطی بر منحنی مماس شده است. معادلهٔ خط مماس را بنویسید.

ب: از نقطهٔ B' متناظر نقطهٔ B روی منحنی (C') نمایش تـابع معکوس تابع فوق خطی بر منحنی (C') مماس شده است. معادلهٔ مماس را بنویسید.

ج: معادلهٔ تابع معکوس تابع فوق را تعیین ونمودار دومنحنی را در فاصلهٔ [۲و۰] (دامنهٔ تابع اول) رسم کنید:

حل- الف: داریم $y'=۳x^{۲}$ چون B(۲و۸)، پس‌ضریب زاویه‌ای مماس‌برمنحنی (C) درB خواهد بود:

$$m=y_B'=۱۲ \text{ ضریب زاویه مماس}$$

پس معادلهٔ مماس در B خواهد بود:

$$y-۸=۱۲(x-۲) \text{ یا } y=۱۲x-۱۶$$

ب: داریم B'(۸و۲) وهمچنین $y'_{B'}=\frac{۱}{y'_B}$ یا $m=\frac{۱}{۱۲}$ ضریب زاویه مماس درB'.

پس معادلهٔ مماس درB' برمنحنی تابع معکوس که قرینهٔ مماس اولی نسبت بـه‌نیمساز ربع اول می‌باشد چنین است :

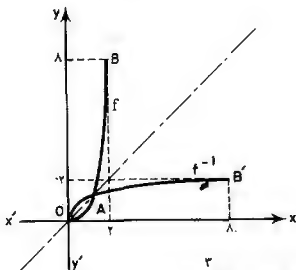
$$y-۲=\frac{۱}{۱۲}(x-۸) \text{ یا } y=\frac{۱}{۱۲}x+\frac{۴}{۳}$$

ج: $y' = 3x^2$ بنابراین $y' \geqslant 0$ یعنی تابع فوق به‌ازای جمیع مقادیــر x صعودی است.

بنابراین معکوس دارد و معادله تابع معکوس خواهد بود: $x = \sqrt[3]{y}$ (y متغیر مستقل و x متغیر تابع) پس $y = \sqrt[3]{x}$

در شکل زیر منحنی هردو تابع را دریك دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم.

$y = x^3$ و $0 \leqslant x \leqslant 2$ و $0 \leqslant y \leqslant 8$



$y = \sqrt[3]{x}$ و $0 \leqslant x \leqslant 8$ و $0 \leqslant y \leqslant 2$

سه نقطه از منحنی f: $O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B(2,8)$

سه نقطه‌ازمنحنی f^{-1}: $O(0,0)$ و $A(1,1)$ و $B'(8,2)$

دومنحنی نسبت به‌نیمساز ربع اول قرینه‌اند.

مثال۴ـ مشتق تابع $y = \text{Arccos}\, x$ را بکمك تابع معکوس تعیین کنید.

حل ـ تابع داده شده درفاصلهٔ $[-1,1]$ پیوسته وهمواره نزولی است:

$y = \text{Arccos}\, x$ ، $x \in [-1,1]$ ، $y \in [0,\pi]$

پس تابع معکوس دارد:

$x = \cos y$ ، $y \in [0,\pi]$ ، $x \in [-1,1]$

مـی‌دانیم $y' = \frac{1}{x'}$ و چون $x' = -\sin y$ و $0 \leqslant y \leqslant \pi$ است پس $\sin y \geqslant 0$ وداریم:

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

بنا براین:

$$y = \mathrm{Arc}\cos x$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad ، \quad -1 < x < 1$$

مثال ۵- تابع بصورت زیر داده شده است:

$$y = \mathrm{Arc}tg x \text{ و } y \in]-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}[$$

مشتق تابع را با استفاده از تابع معکوس آن تعیین کنید.

حل- وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y از $\frac{-\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کندو تابع همواره معین وصعودی است پس معکوس دارد و معکوس آن $x = tg y$ است که درآن y متغیر مستقل و x متغیر تابع است بنابراین $y' = \frac{1}{x'}$ اما:

$$x' = 1 + tg^2 y = 1 + x^2$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arc}tg x \\ y' = \dfrac{1}{1 + x^2} \end{cases}$$

مثال ۶- تابع f بصورت زیر داده شده است:

$$y = \mathrm{Arc}cotg x \quad ، \quad y \in]0 \text{ و } \pi[$$

مشتق آنرا با استفاده از تابع معکوس آن بدست آورید.

حل- وقتی‌که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y از π تا صفر نزول می‌کند وتابع همواره معین وپیوسته ونزولی است پس معکوس دارد وتابع معکوس آن $x = cotg y$ است (y متغیرمستقل).

می‌دانیم $y' = \frac{1}{x'}$ اما:

$$x' = -(1 + cotg^2 y) = -(1 + x^2)$$

$$y' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arc}cotg x \\ y' = \dfrac{-1}{1 + x^2} \end{cases}$$

مثال۷ـ تابع $y\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $y = Arcsin u$ و $u = f(x)$ مفروض‌اند. مشتق y را نسبت به‌متغیر x بدست‌آورید.

حل:

$$y = Arcsin u$$
$$u = sin y$$

طبق مشتق تابع معکوس داریم:

$$y'_u = \frac{1}{u'_y}$$
$$u'_y = cos y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1 - u^2}$$
$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

واز طرفی طبق مشتق تابع، تابع داریم:

$$y'_x = y'_u \times u'_x$$
$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \times u'_x$$

پس $u = f(x)$ و $y = Arcsin u$ داریم:

$$\boxed{y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

بهمین ترتیب مشتق $y = Arccos u$ برابر $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ ومشتق $y = Arctg u$ برابر $y' = \frac{u'}{1 + u^2}$ و مشتق $y = Arccotg u$ برابر $y' = -\frac{u'}{1 + u^2}$ است.

تمرین

تابعهای زیر داده شده‌اند. مشتق آنها را تعیین‌کنید.

۱) $y = Arcsin 2x$ ۲) $y = Arccos 3x$

۳) $y = Arctg 2x$ ۴) $y = Arccotg 2x$

۵) $y = Arcsin ax$ ۶) $y = Arcsin ax + Arccos ax$

۷) $y = Arctg mx + Arctg nx$ ۸) $y = (Arcsin x)^3$

۹ـ مشتق تابع با ضابطهٔ $y = (Arctg x)^2$ را به‌ازای $x = 1$ تعیین‌کنید.

۱۰ـ معادلهٔ مماس برمنحنی نمایش تابع $y = Arctg 3x$ را درنقطه‌ای‌از منحنی به طول $\frac{1}{3}$ بنویسید.

۱۱- تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x^۳ + ۱}$ داده شده است؛

الف- مطلوبست تعیین دامنهٔ تعریف وبرد آن.

ب- تابع معکوس ومشتق آنرا تعیین کنید.

ج- معادلهٔ خط مماس برمنحنی فوق را درنقطهٔ A بطول ۲ وهمچنین معادلهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع معکوس را در نقطهٔ A' متناظر A تعیین کنید. دوخط نسبت بهم چه وضعی دارند؟

۱۲- تابع با ضابطهٔ $y = x + \frac{۱}{x}$ مفروض است. درهریك از حالات $x > ۱$ و $x < -۱$ تابع معکوس و مشتق آنرا تعیین کنید.

۱۳- تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x + ۲}{۲x - ۳}$ داده شده است. نمودار این تابع ونمودارمعکوس آنرا در یك دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۴- مشتق توابع زیر را بدست آورید:

$$y = \text{Arcsin}\, ۲x\sqrt{۱ - x^۲}$$

$$y = \text{Arctg}\, \frac{۲x}{۱ - x^۲}$$

$$y = \text{Arccos}\, \frac{۲x}{۱ + x^۲}$$

$$y = \text{Arctg}\, \frac{x - a}{۱ - ax}$$

۱۵- اگر $y = (\sqrt{x} - \sqrt{x - a})^m$ و $z = (\sqrt{x} + \sqrt{x - a})^m$ باشد نشان دهید

$$y'z + z'y = ۰$$

۳-۹- کاربرد مشتق در تعیین یکنوا بودن، اکسترمم نسبی

قضیه- تابع f درهرفاصله‌ای که مشتق آن یعنی f' مثبت باشد(مگراحیاناً درتعداد باپایانی نقطه صفر شود) صعودی، و درهرفاصله‌ای که مشتق آن منفی باشد (مگر احیاناً در تعداد با پایانی نقطه صفرشود) نزولی، و درهر فاصله‌ای که مشتق آن برابرصفرباشد، مقداری ثابت است.

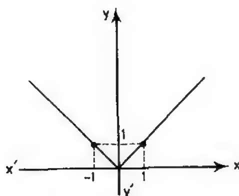
۳-۱۰- نقاط اکسترمم یك تابع

تعریف- فرض کنید f در $x_۰$ پیوسته باشد. اگر f' درسمت چپ و نزدیك $x_۰$ مثبت و درسمت راست ونزدیك $x_۰$ منفی باشد میگویند تابع f در $x_۰$ دارای یك ماکزیمم نسبی است. و اگر f'

در سمت‌چپ ونزدیك x_0 منفی و در سمت راست ونزدیك x_0 مثبت باشد. میگویند تابع f در x_0 دارای یك می‌نیمم نسبی است.

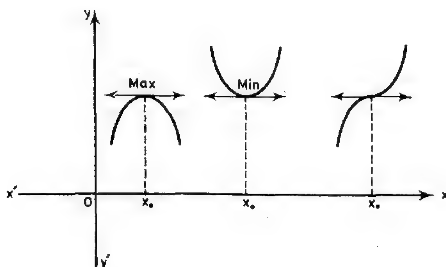
نکته۱: اگر تابع f در x_0 دارای اکسترمم نسبی و مشتق‌پذیر باشد. داریم $f'(x_0) = 0$ ولی عکس این مطلب درست نیست زیرا ممکن است تابع در نقطه x_0 دارای اکسترمم نسبی باشد ولی $f'(x_0)$ برابر صفر نباشد.

مثلاً- تابع $y = |x|$ در نقطه $x_0 = 0$ دارای می‌نیمم است ولی مشتق تابع در این نقطه برابر صفر نیست.



نکته ۲- اگر هنگامی که x نمو می‌کند، $f'(x)$ با تغییر علامت در نقطه x_0، صفر شود، f در x_0 اکسترمم است واگر $f'(x)$ در x_0، صفرشده ولی تغییرعلامت ندهد، نقطه$M_0(x_0, f(x_0))$ نقطه عطف است.

نکته ۳- اگر(C) منحنی‌نمایش تابع f باشد وعدد حقیقی x_0 وجود داشته باشد،بطوریکه $f'(x_0) = 0$ باشد، مماس برمنحنی (C) در نقطه $M_0(x_0$ و $f(x_0))$ موازی محورxهاست.



۳-۱۱- بررسی جهت تغییرات یك تابع

برای بررسی جهت تغییرات تابع f، دستورات زیر را بکار می‌بریم.

الف- f' مشتق تابع را حساب نموده، دامنهٔ تعریف f' را بهفواصلی که درآن فواصل

علامت مشتق ثابت و تابع یکنواست تقسیم می‌کنیم (البته این بررسی وقتی امکان دارد که تابع f در فواصلی یکنوا باشد).

ب‌ـ مقدار تابع را درابتدا و انتهای فواصل تعیین شده بدست می‌آوریم .

ج‌ـ از یك جدول برای مشخص نمودن علامت مشتق و فواصل یکنوائی و مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم استفاده می‌کنیم.

مثال ۱ـ جهت تغییرات و مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع بـا ضابطهٔ $y = x^{۳} - ۳x^{۲} + ۲$ را معین کنید.

حل‌ـ دامنهٔ تعریف تابع $D_f = R$ ومشتق آن $y' = ۳x^{۲} - ۶x = ۰$ بازای $x = ۰$ و $x = ۲$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	−۲	↗	$+\infty$

مثال ۲ـ جهت تغییرات ومختصات نقاط اکسترمم تابع با ضابطهٔ $y = x^{۴} - ۴x^{۳} + ۴x^{۲}$ را معین کنید.

حل‌ـ $y' = ۴x^{۳} - ۱۲x^{۲} + ۸x = ۴x(x^{۲} - ۳x + ۲) = ۰$

مشتق بازای $x = ۰$ و $x = ۱$ و $x = ۲$ صفرشده و تغییر علامت می‌دهد.

y	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↗	۱	↘	۰	↗	$+\infty$

مثال ۳ـ جهت تغییرات ومختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع باضابطهٔ $y = x + ۱ + \frac{۴}{x^{۲}}$ رامعین کنید.

حل: $y' = \frac{x(x^{۳} - ۸)}{x^{۴}}$ و $D_f = R - \{۰\}$

علامت مشتق بستگی به‌علامت صورت دارد. $x(x^{۳} - ۸) = ۰$ ومشتق بازای $x = ۰$ و $x = ۲$ تغییرعلامت میدهد.

$f(2)=3$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x+1+\frac{4}{x^2}) = +\infty$$

در نقطه $x=0$ تابع اکسترمم ندارد زیرا تابع در این نقطه تعریف نشده و منفصل است.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y′		+	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	$+\infty$

مثال ۳- جهت تغییرات ومختصات نقاط اکسترمم تابع باضابطهٔ $y=(x^2-1)^3$ رامعین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f=R$ و $y'=6x(x^2-1)^2=0$ مشتق بازای $x=0$ و $x=\pm 1$ صفر شده ولی فقط در نقطه $x=0$ تغییرعلامت می‌دهد.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y′		−	0	−	0	+	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$
			عطف		می‌نیمم		عطف		

مثال۴- جهت تغییرات و مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$ رامعین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f=R$ و $y'=\dfrac{3x^2-6x}{3\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}}$ علامت مشتق بستگی به‌علامت صورت کسر دارد.

ومشتق بازای $x=0$ و $x=2$ تغییرعلامت می‌دهد، ولی‌مشتق در نقطه $x=0$ معنی ندارد.

$f(2)=-\sqrt[3]{4}$ و $f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'	+	$+\infty$ | $-\infty$	−	۰	+		
y	$-\infty$	↗	۰	↘	$-\sqrt[۳]{۴}$	↗	$+\infty$

مثال۵ـ جهت تغییرات ومختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم تابع با ضابطهٔ $y = ۱ + x^۲ + \sqrt{۱ - x^۲}$ را معین کنید.

حل ـ دامنهٔ تعریف تابع $D_f = [-۱ \text{ و } ۱]$ ومشتق آن.

$$y' = x(۲ - \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}})$$

برای تعیین علامت مشتق طرفین تساوی را درمزدوج عبارت داخل پرانتز که $(۲ + \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}) > ۰$ است ضرب‌میکنیم.

نتیجه می‌شود:

$$y'(۲ + \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}) = x(۴ - \frac{۱}{۱ - x^۲})$$

$$y'(۲ + \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}) = \frac{x(۳ - ۴x^۲)}{(۱ - x^۲)}$$

بنابراین علامت مشتق بستگی به‌علامت صورت‌کسر طرف دوم دارد زیرا مخرج کسر مثبت است. ومشتق‌بازای $x = ۰$ و $x = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ صفر شده تغییرعلامت‌می‌دهد.

x	-۱		$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$		۰		$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$		۱
y'	∞	+	۰	−	۰	+	۰	−	∞
y	۲	↗	۲/۲۵	↘	۲	↗	۲/۲۵	↘	۲

مثال۶ـ جهت تغییرات ومختصات‌نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم تابع‌باضابطهٔ $y = |x^۲ - ۲x|$ را معین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f = R$ وضابطهٔ تابع‌را می‌توان به‌صورت‌زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \ ، \ x \geqslant 2 \text{ و } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 \ ، \ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 \ ، \ x \geqslant 2 \text{ و } x \leqslant 0 \\ 2 - 2x \ ، \ 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

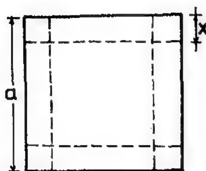
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		−	|	+	0	−	|	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

مشتق این تابع در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ بدون صفر شدن تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه تابع در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ مشتق پذیر نیست ولی دراین‌نقاط دارای می‌نیممی برابر صفر و در نقطه $x = 1$ دارای ماکزیممی برابر یك مـی‌باشد.

۲-۱۲- موارد استعمال مشتق در تعیین اکسترمم در امور فنی

مثال۱- صفحهٔ مقوایی است مربع شکل به‌ضلع a می‌خواهیم ازهرگوشهٔ آن مربعی ببریم و آن را خم کنیم تاجعبه‌ای‌کامل شود. مطلوب است تعیین ضلع مربع گوشه‌ها برای آن‌که حجم جعبه ماکزیمم باشد.

حل- اگر طول ضلع مربع گوشه‌ها x باشد ضلع قاعده‌جعبه $a - 2x$ خواهد بود در این صورت اگر حجم جعبه را v بگیریم:





$$v = (a - 2x)^2 x$$

یا:

$$v = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$$

برای تعیین ماکزیمم یامینیمم تابع v ازآن مشتق می‌گیریم:

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2$$

مشتق‌را مساوی صفر قرار داده جوابهای‌آن را به دست می‌آوریم :

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12} = \frac{4a \pm 2a}{12} = \frac{a}{2} \text{ و } \frac{a}{6}$$

حجم جعبه یا مقدار تابـع در صفر و $\frac{a}{2}$ برابر صفر می‌شود. و باتوجه به این که‌حجم‌قوطی نمی‌تواند منفی باشد این مقدار مینیمم‌حجم است .

توجه‌کنید $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ یعنی x در فاصلهٔ $(\frac{a}{2}$ و $0)$ است.

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
y	0	↗	$\frac{2a^3}{27}$	↘	$\frac{a^3}{16}$	↘	$\frac{a^3}{27}$	↘	0
y′		+	0		−				0
وضع تابع		صعودی	ماکزیمم			نزولی			مینیمم

حجم جعبه چنان‌که می‌بینید در $x = \frac{a}{6}$ ماکزیمم می‌شود.

مثال ۲- با مقدار معینی فلز می‌خواهیم ظرفی استوانه شکل با ضخامت معین بسازیـم به قسمی که‌گنجایش آن ماکزیمم باشد ارتفاع استوانه را برحسب شعاع قاعدهٔ آن حساب‌کنید.

حل- می‌دانیم سطح کل استوانه $s = 2\pi rh + 2\pi r^2$ و حجم‌آن $v = \pi r^2 h$ است (rشعاع قاعده و h ارتفاع است) مطابق صورت مسئله s مقداری ثابت است و ما مـی‌خواهیم باتوجه به این موضوع v ماکزیمم باشد.

ازفرمول مساحت، ارتفاع را برحسب مساحت و شعاع حساب می‌کنیم:

$$h = \frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

پس:

$$v = \pi r^2 \times \frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{sr}{2} - \pi r^3$$

مشتق تابع v را نسبت به‌متغیر r حساب‌کرده برابر صفر می‌گیریم:

$$V' = \frac{S}{۲} - ۳\pi r^۲ = ۰$$

ازاینجا نتیجه می‌شود:

$$r = \sqrt{\frac{S}{۶\pi}}$$

پس:

$$h = \frac{S - ۲\pi r^۲}{۲\pi r} = S \times \frac{\frac{۲}{۳}}{۲\pi\sqrt{\frac{S}{۶\pi}}} = ۲\sqrt{\frac{S}{۶\pi}} = ۲r$$

پس باید ارتفاع این استوانه باقطر قاعدهٔ آن برابر باشد.

۴-۱۳ـ تقعر وتحدب منحنی، نقطه عطف

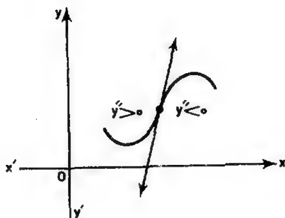
قضیهـ تقعر منحنی (C) نمودار تابع f دریک‌فاصله به سوی yهای مثبت است هرگاه: در آن فاصله $f''(x) > ۰$ باشد به‌سوی yهای منفی است هرگاه: درآن فاصله $f''(x) < ۰$ باشد.

نقطه‌ای ازمنحنی راکه‌درآن نقطه‌سوی تقعر منحنی‌عوض میشود نقطه عطف‌منحنی می‌گویند.

شرط آنکه نقطه $x = a$ نقطه عطف منحنی تابع f باشد این است‌که:

اولا: تابع f در این‌نقطه پیوسته‌باشد.

ثانیاً: f'' درآنجاتغییرعلامت بدهد.



با توجه به‌تعریفی که برای جهت تقعر منحنی‌کردیم معلوم می‌شود که مماس برمنحنی درنقطه عطف ازآن عبور می‌کند.

مثال: جهت تقعر و مختصات نقاط عطف تابع باضابطهٔ $y = x^4 - 6x^2$ را معین کنید.

حل:

$y' = 4x^3 - 12x$ و $y'' = 12x^2 - 12 = 0$

مشتق ثانی تابع بازای $x = 1$ و $x = -1$ تغییرعلامت می‌دهد.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
		تقعربسوی بالا	عطف	تقعربسوی پائین	عطف	تقعر بسوی بالا	

نقاط $A\begin{vmatrix} x = 1 \\ y = -5 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x = -1 \\ y = -5 \end{vmatrix}$ نقاط عطف تابع‌اند.

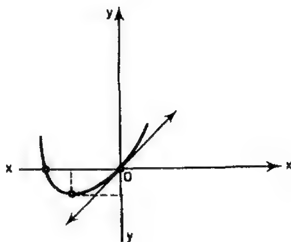
توجه: اگر مشتق ثانی‌تابع‌درنقطه x_0، صفر شود ولی‌تغییرعلامت ندهد، نقطهٔ به‌طول x_0را نقطه méplat می گویند.

مثلا: در تابع $y = 2x^4 + x$،مشتق ثانی:

$y' = 8x^3 + 1$ ، $y'' = 24x^2 = 0$

بازای $x = 0$ ، صفر شده ولی تغییرعلامت نمی‌دهد. در نتیجه نقطه به‌طول $x = 0$ را نقطه méplat می گویند.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$+$	0	$+$	
		تقعر بسوی بالا	نقطه méplat	تقعر بسوی بالا	



تمرین

۱ـ جهت تغییرات، ومختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم هریك‌ازتوابع زیررا مشخص‌کنید.

$y = \frac{x^3}{x-1}$ $\qquad$ $y = \frac{(x^2-1)}{(x-2)^2}$

$y = x^2(x-1)^3$

$y = x\sqrt{2-x^2}$

۲ـ جهت تقعر و مختصات نقاط عطف هریك ازتوابع زیر را معین‌کنید.

$y = \frac{9(1-x)}{x^3}$

$y = \sqrt[3]{x^2-1}$

$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

۳ـ تابع f باضابطهٔ $f(x) = \frac{ax^2 - bx}{2x^2+1}$ مفروض است.

اولا: تحقیق‌کنیدکه این تابع همواره دارای‌یك ماکزیمم ویك می‌نیمم است.

ثانیاً: a و b را چنان معین کنید که نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم تابع (۲ و۱ ـ) باشد.

۴ـ ثابت‌کنید تابع $y = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در مبداء مختصات دارای می‌نیمم است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۵ـ نشان دهیدکه منحنی (C) نمایش تابع f باضابطهٔ $y = \frac{2x}{x^2+1}$ دارای سه نقطه عطف بر یك استقامت می‌باشد.

۶ـ تابع f باضابطهٔ $f(x) = x^4 - 2x^2$ مفروض است.

اولا: جهت تغییرات ومختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم آنرا تعیین کنید.

ثانیاً: سوی تقعر ومختصات نقاط عطف آنرا نیز تعیین‌کنید.

ثالثاً: نشان دهیدکه تابع f درفاصله [۱و۰] معکوس پذیر است ومشتق تابع معکوس آنرا تعیین‌کنید.

۷ـ درتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مقادیر a و b و c و d را چنان تعیین‌کنیدکه نقطه M(۲و۰) نقطه ماکزیمم و نقطه F(۰و۱) نقطه عطف نمودار تابع فوق باشد.

۸ـ یك ورقهٔ مقوا به‌شکل مستطیل و به‌مساحت ثابت a^2 را به چه ابعادی انتخاب کنیم تا بتوان با آن مکعب مستطیلی به ارتفاع ثابت h بسازیم که دارای حجم ماکزیمم باشد (ازهرگوشهٔ آن ورقه مربعی به‌ضلع h بریده و آنرا تا کرده‌ایم).

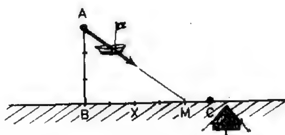
۹ ـ ثابت‌کنید که یك چادر مخروطی برزنتی باحجم معین وقتی کمترین مقدار برزنت را لازم دارد که نسبت ارتفاع آن به شعاع قاعده $\sqrt{۲}$ باشد.

۱۰ـ بین مثلثهـای متساوی‌الساقین محاط در دایـره ، محیط مثلث متساوی‌الاضلاع از محیط مثلثهای دیگر بیشتر است .

۱۱ـ تحقیق کنید بین استوانه‌های دوار که درداخل کـرهٔ به شعاع R محـاط است آنکه ارتفاعش $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ است حجمش از دیگر استوانه‌ها بیشتر است.

۱۲ـ میخواهیم یك‌قوطی دربازی بسازیم که حجم آن یك لیتروشکل آن منشور مربع‌القاعده باشد. ابعاد آنرا طوری به دست آورید که مصالح بکار رفته می‌نیمم بـاشد (سطح آن مـی‌نیمم باشد.)

۱۳ـ درشکل زیر نقطه A یك‌کشتی و خط BC ساحل را نشان می‌دهد . فاصله کشتی از ساحل ۹ کیلومتر و فاصله C (محل یك اردو) از B (نزدیکترین نقطه ساحل به‌کشتی) ۱۵ کیلومتر است یك‌نفر ازکشتی که قایقی دراختیار دارد می‌خواهد به‌محل اردو رفته یك‌پیام فوری به‌سرپرست اردو برساند درصورتی که سرعت اوباقایق ۴ کیلومتر درساعت وپیاده ۵ کیلومتر درساعت باشد در فاصله چندکیلومتری B پیاده شود تادرکمترین مدت به‌اردو برسد.



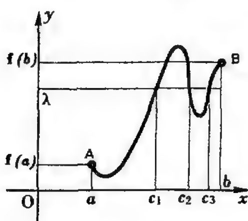
فصل ۴

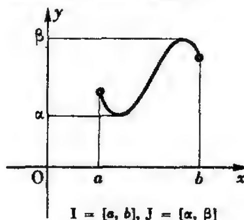
خط مجانب

۴-۱- بررسی تابع در کرانه‌ها

فرض کنید تابع حقیقی f، روی دامنهٔ تعریف D_f، معین باشد. و D_f دامنهٔ تعریف تابع به فاصله‌هائی نظیر I_n که تابع در آن فاصله‌ها، پیوسته، یکنواست، تقسیم شده باشد. هریك از فاصله‌های نظیر I_n دو کرانه دارد (که احتمالا ممکن است بینهایت باشد) بررسی تابع f در همسایگی این دو کرانه متفاوت را، بررسی روی کرانه‌های f می‌گویند. اگر a یك کرانه I_n باشد حالتهای زیر را خواهیم داشت:

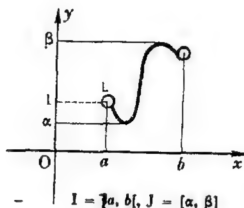
الف- اگر $a \in I_n$ باشد می‌گویند نقطه $A(a$ و $f(a))$ نقطهٔ توقف منحنی است.





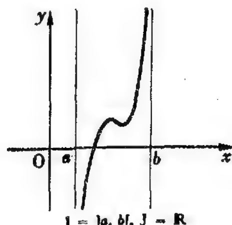
I = [a, b], J = [α, β]

ب- اگر $a \notin I_n$ و $(l \in R)$ و $\lim_{x \to a} f(x) = l$ باشد می‌گویند نقطه $L(a$ و $l)$ نقطه حد منحنی است.



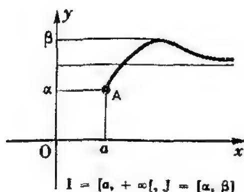
I =]a, b[, J = [α, β]

ج- اگر $a \notin I_n$ و تابع در a حد باپایان (چپ و راست) نداشته باشد در آن صورت یك شاخه بینهایت داریم.



$I =]a, b[, J = \mathbb{R}$

د - اگر a بینهایت باشد یعنی $a \in \{-\infty$ و $+\infty\}$ بررسی شاخه‌هـای بینهایت مطرح می‌شود.



$I = [a, +\infty[, J = [\alpha, \beta]$

خط مجانب

۴ - ۲ - شاخه بی‌نهایت منحنی - گوئیم منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ دارای شاخهٔ بی نهایت است هرگاه نقطه یا نقاطی روی منحنی وجود داشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن (طول یاعرض یاهردو) به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال ۱ - منحنی نمایش $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ دارای شاخه بی نهایت است زیرا:

$$\text{حد}_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}=0$$

مثال ۲- منحنی نمایش $y=\frac{1}{(x-2)^2}+1$ دارای شاخه‌های بی‌نهایت است زیرا داریم :

$$\begin{cases} x\to 2 \\ y\to+\infty \end{cases} \text{و} \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to 1 \end{cases} \text{و} \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to 1 \end{cases}$$

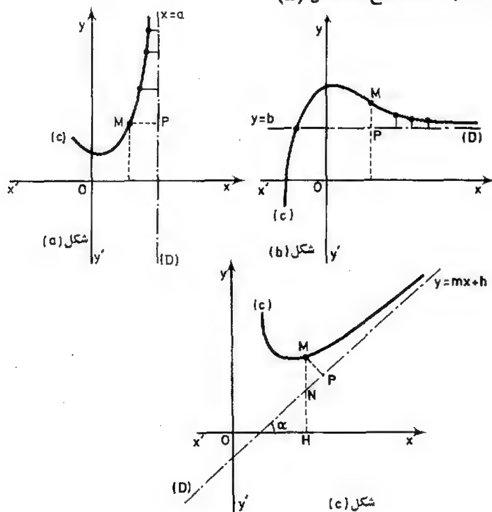
مثال ۳ - منحنی نمایش $y=x+\frac{1}{x^2+1}$ دارای شاخه‌های بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x\to-\infty \\ y\to-\infty \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+\infty \end{cases}$$

۴-۳- تعریف خط مجانب : هرگاه منحنی (C) نمایش تابع $y=f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد خط(D) را مجانب‌آن شاخه گوئیم درصورتی که فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M ازآن‌شاخه تا آن خط وقتی‌که نقطه روی آن شاخه بی‌نهایت دورشود به‌سمت صفر میل‌کند.

در شکلهای زیر هر یك از منحنیها دارای شاخهٔ بی‌نهایت است و حالتهای مختلف مجانب را نشان می‌دهند.

خط مجانب منحنی ، ممکن است موازی محور y ها باشد که دراین صورت آنرا اصطلاحاً مجانب قائم گویند شکل (a) ، و ممکن است موازی محور x ها باشد، که در این صورت اصطلاحاً آنرا مجانب افقی گویند شکل (b) ، و ممکن‌است محورهای مختصات را قطع کند که در این‌صورت اصطلاحاً آنرا مجانب مایل گویند شکل (c). خط مجانب منحنی ممکن‌است منحنی را دریك یاچند نقطهٔ قطع کند شکل (b)

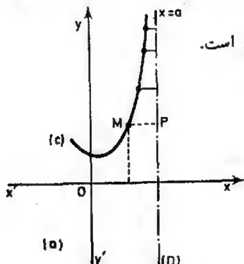


۴-۴- مجانب قائم

قضیه I- اگر در تابع $y=f(x)$ حد چپ یا حد راست یا حد تابع وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود یعنی:

$$\begin{cases} x\to a \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a^+ \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a^- \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases}$$

خط D به معادلهٔ $x=a$ مجانب قائم منحنی است.



اثبات- فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ از منحنی تا خط (D) عبارتست از:

$MP=|x-a|$، حال اگر نقطهٔ M روی منحنی بی‌نهایت دور شود یعنی $y=f(x)\to+\infty$ یا $y\to-\infty$ بنابه فرض داریم $x\to a$ یا $|x-a|\to 0$ یعنی فاصله MP به سمت صفرمیل کند و خط D مجانب منحنی خواهد بود. اثبات حالتهای $x\to a^+$ و $x\to a^-$ مشابه اثبات فوق است.

از آنچه گفته‌شد نتیجه می‌شود:

برای تعیین معادلهٔ مجانب قائم منحنی تابع $y=f(x)$ باید a راچنان اختیار کنیم‌که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to a^+ \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a^- \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases}$$

نتیجه - محور yها وقتی مجانب قائم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to 0^+ \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to 0^- \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to 0 \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases}$$

مثال۱- منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ دارای مجانب قائم $x=1$ است زیرا:

$$\begin{cases} x\to 1^+ \\ y\to +\infty \end{cases}$$

مثال۲- منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x}{\sqrt{2-x}}$ مجانب قائم $x=2$ دارد زیرا:

$$\begin{cases} x\to 2^- \\ y\to +\infty \end{cases}$$

مثال۳- خط مجانب قائم منحنی تابع $y=\frac{x-4}{(x-3)^2}$ به معادلهٔ $x=3$ است زیرا:

$$\begin{cases} x\to 3 \\ y\to -\infty \end{cases}$$

مثال۴- مجانب قائم منحنی تابع $y=\frac{1}{x}$ خط $x=0$ (محور yها) است:

$$\begin{cases} x\to 0^- \\ y\to -\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x\to 0^+ \\ y\to +\infty \end{cases}$$

مثال۵- منحنی نمایش تابع $y=\frac{-2}{(x-4)(x+1)^2}$ دو مجانب قائم به معادله‌های $x=4$ و $x=-1$ دارد. زیرا:

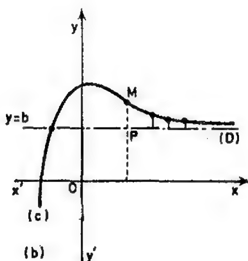
$$\begin{cases} x\to 4^- \\ y\to +\infty \end{cases} ، \begin{cases} x\to 4^+ \\ y\to -\infty \end{cases} ، \begin{cases} x\to -1 \\ y\to +\infty \end{cases}$$

نتیجه: از مثالهای بالا دیده می‌شود، منحنی‌هائی دارای مجانب قائم هستند که ضابطهٔ تابع آنها کسری باشد. برای تعیین معادله مجانب قائم اینگونه منحنی‌ها مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم . ریشه‌های مخرج کسر (درصورت وجود) معادلات خطوط مجانب قائم را مشخص می کنند.

۴-۵- مجانب افقی

قضیه II- هرگاه حد تابع $y=f(x)$، وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ برابر b باشد خط D به معادله $y=b$ مجانب افقی منحنی است.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$



(b)

اثبات - فاصلهٔ نقطه $M(x\text{ و }y)$ از منحنی تا خط D به معادلهٔ $y=b$ عبارتست از : $MP=|y-b|$. حال اگر M روی منحنی بی‌نهایت دور شود یعنی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ مطابق آنچه در فرض داریم $f(x)=y\to b$ پس $|y-b|\to 0$ یعنی فاصلهٔ MP به‌صفر میل‌می‌کند وخط D مجانب منحنی خواهد بود .

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود :

برای تعیین مجانب افقی منحنی تابع $y=f(x)$ باید b را قسمی اختیار کنیم که داشته باشیم

$$\begin{cases}x\to+\infty\\ y\to b\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}x\to-\infty\\ y\to b\end{cases}$$

نتیجه- محور xها وقتی مجانب منحنی است که داشته باشیم: $\begin{cases}x\to+\infty\\ y\to 0\end{cases}$ یا $\begin{cases}x\to-\infty\\ y\to 0\end{cases}$

مثال۱ـ مجانب افقی منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۲}{x^۲+۴}+۱$ به معادلهٔ $y=۱$ است زیرا داریم:

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to ۱ \end{cases}$$

مثال۲ـ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $y=۳+\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$ عبارتند از $x=۱$ و $y=۳$ چون داریم:

$$\begin{cases} x\to ۱^- \\ y\to +\infty \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x\to -\infty \\ y\to ۳ \end{cases}$$

مثال۳ـ منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}$؛

الف ـ مجانب قائم ندارد، زیرا به ازای هر مقدار حقیقی از x این تابع پیوسته بوده و دارای حد با پایان است. (توجه کنید که عبارت مخرج تابع صفر نمی‌شود)

ب ـ دومجانب افقی به معادله‌های $y=+۱$ و $y=-۱$ دارد زیرا:

$$y=\frac{x}{|x|\sqrt{۱+\frac{۴}{x^۲}}}$$

$$x>\circ \Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۴}{x^۲}}} \Rightarrow \begin{cases} x\to +\infty \\ y\to +۱ \end{cases}$$

$$x<\circ \Rightarrow y=\frac{-۱}{\sqrt{۱+\frac{۴}{x^۲}}} \Rightarrow \begin{cases} x\to -\infty \\ y\to -۱ \end{cases}$$

۴ـ۶ـ مجانب مایل

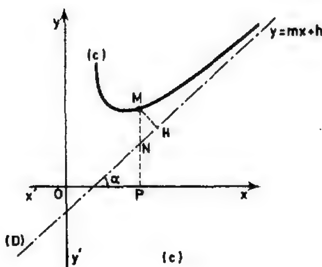
هرگاه حد تابع $y=f(x)$، وقتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند برابر بینهایت باشد یعنی: $+\infty$ یا $-\infty$ حد $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ ، $-\infty$ یا $+\infty$ حد $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ، ممکن است نمودار تابع $y=f(x)$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $Y=mx+h$ باشد.

قضیهٔ IIIـ اگر خط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ مجانب مایل منحنی تابع $y=f(x)$ باشد داریم :

$$\lim_{x\to+\infty} y-Y=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} (y-Y)=0$$

اثبات ـ چون خط D مجانب منحنی است پس $\lim_{x\to+\infty} MH\to 0$ یا $\lim_{x\to-\infty} MH=0$.

فرض کنید $\lim_{x\to+\infty} MH=0$ اگر α زاویهٔ خط D با محور Ox باشد چون خط D موازی yy' نیست $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ و در نتیجه $\cos\alpha\neq 0$



در مثلث قائم الزاویهٔ MNH داریم $MH=MN\cos\alpha$ چون حد MH وقتی نقطهٔ M روی منحنی بی‌نهایت دور شود صفر است، حد طرف دوم نیز صفر خواهد شد و با توجه به اینکه $\cos\alpha\neq 0$ پس حد MN صفر خواهدشد یعنی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty} MN=\lim_{x\to+\infty} |PM-PN|=\lim_{x\to+\infty} (y-Y)=0$$

اثبات درحالت $\lim_{x\to-\infty} MH=0$ شبیه به فوق‌است.

عکس قضیهٔ III ــ هر گاه تابع $y=f(x)$ و خط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ را داشته باشیم به‌قسمی‌که $\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$ یا $\lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$ ، آنگاه خط D مجانب منحنی است.

اثبات ـ فرض کنید $\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$ حد . هرگاه دونقطهٔ M و N را به ترتیب روی منحنی وخط D با یك طول انتخاب کنیم داریم: $NM=|y-Y|$ وچون نقطه روی منحنی بی‌نهایت دور شود با استفاده ازفرض داریم: $\lim_{x\to+\infty}|y-Y|=0$ حد یعنی $\lim_{x\to+\infty}NM=0$ حد وباتوجه به‌رابطهٔ $MH=MN.\cos\alpha$ که طرف دوم آن به سمت صفر میل می‌کند خواهیم داشت :

$\lim_{x\to+\infty}MH=0$ حد یعنی خط D مجانب منحنی است.

اثبات درحالتیکه $\lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$ حد شبیه به‌حالت‌فوق‌است. باتوجه به‌قضیه III وعکس آن داریم :

شرط لازم وکافی برای‌اینکه‌خطD به معادلهٔ $Y=mx+h$ مجانب مایل منحنی تـابع $y=f(x)$ باشد این است که :

$$\lim_{x\to+\infty}|y-Y|\to 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}|y-Y|=0$$

نتیجه ـ تابعهایی که بصورت $y=mx+h+\frac{F(x)}{G(x)}$ بوده و درجهٔ صورت کسر یعنی $F(x)$ کمتراز درجهٔ مخرج یعنی $G(x)$ باشد دارای‌مجانب مایل $Y=mx+h$ می‌باشند، زیرا داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}|y-Y|=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}|y-Y|=0$$

۴ـ۷ـ روش تعیین مجانب مایلـ برای تعیین $y=mx+h$، معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع $y=f(x)$ ، درصورت وجود، کافی‌است مقادیر m و h را تعیین‌کنیم بقسمی که:

$$\lim_{x\to+\infty}(y-mx-h)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}(y-mx-h)=0$$

برای این‌کار به شرح زیر عمل می‌کنیم . (فقط برای حالت $x\to+\infty$ بحث را ادامه می‌دهیم وحالت $x\to-\infty$ شبیه به‌آن است):

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y-h}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{x}-\frac{h}{x}\right)$$

هر گاه $x \to +\infty$ ، حد $\frac{h}{x}$ برابر صفراست. بنابراین:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x}$$

پس از تعیین مقدار m از رابطهٔ $\lim_{x \to +\infty} (y - mx - h) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx)$$

تبصره ۱ـ در موقع تعیین m و h:

الف: اگر $m = 0$ و h حد معینی داشته باشد، مجانب حاصل افقی و معادله‌اش $y = h$ است.

ب: اگر m یك عدد حقیقی و h بینهایت شود منحنی دارای شاخه سهمی در امتداد خط D به‌ضریب زاویهٔ m است.

مثال: مانند تابع $y = x + \sqrt{x}$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty$$

منحنی دارای شاخه سهمی در امتداد $y = x$ می‌باشد.

ج: اگر m یك عدد حقیقی وعبارت$(y - mx)$ وقتی x به‌سمت ∞ میل می‌کندحد نداشته باشد منحنی در راستای $y = mx$ به بینهایت می‌رود ولی دارای شاخهٔ سهمی مانند نیست.

مثال: مانند تابع $y = x + \sin x$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (x + \sin x - x) = \text{حد ندارد}$$

که نمودارآن در راستای $y = x$ به‌بینهایت می‌رود.

د: اگر m بینهایت شود منحنی‌شاخه سهمی مانند در امتداد محورyها دارد.

مثال: مانندتابع $y=x^2-1$.

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x}=\pm\infty$$

ه: اگر عبارت $\frac{y}{x}$ وقتی x به‌سمت ∞ میل می‌کند حد نداشته باشد منحنی امتداد مجانب ندارد

تبصرهٔ ۲ــ مجانب مایل $y=mx+h$ را می‌توان مماس برمنحنی (C) نمایش تابع $y=f(x)$ دانست که نقطهٔ تماسش در بی‌نهایت باشد: بنابراین اگر معادله‌های:

$$y=f(x) \quad \text{و} \quad y=mx+h$$

را باهم حل کنیم طول نقاط برخورد خط ومنحنی از معادلهٔ $f(x)-mx-h=0$ (۱) بدست می‌آید. حال اگر $f(x)$ یك عبارت جبری برحسب x باشد، چون معادلهٔ اخیر باید دارای ریشه مضاعف ∞ باشد باید ضرایب دو جملهٔ بزرگترین درجهٔ معادله (۱) را[پس از حذف مخرجها و رادیکالها] مساوی صفر قرار داد تا m و h بدست آید. (درموقعی که تابع $y=f(x)$ گنگ وشامل ریشگی‌زوج است، باید طرفین معادله را به توان زوج رساند تا از صورت گنگی خارج شود، در این صورت باید دقت نمود که مقادیر m و h بدست آمده ریشهٔ خارجی نباشد.)

مثال ۱ــ مطلوبست تعیین معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع باضابطهٔ: $y=x+1+\frac{x}{x^2+1}$

حل: خط $y=x+1$ مجانب مایل تابع است زیرا داریم:

$$y-x-1=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y-x-1)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

مثال ۲ــ مطلوب است تعیین معادلات خطوط مجانب منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2-3}{x+1}$

حل: خط $x=-1$ مجانب قائم منحنی تابع است زیرا داریم:

$$\begin{cases} x\to-1 \\ y\to\pm\infty \end{cases}$$

هر گاه $x \to \pm\infty$ در این صورت $y \to \pm\infty$ پس منحنی مجانب افقی ندارد وچون درجهٔ عبارت صورت یک‌واحد بیش از درجهٔ عبارت مخرج است پس منحنی مجانب مایل‌دارد. تابع را می‌توان بــه‌صورت $y = x - ۱ - \frac{۲}{x+۱}$ نوشت (صورت را بــر مخرج تقسیم کــردیم) بنابراین خط $y = x - ۱$ مجانب مایل منحنی تابع است.

مثال ۳ــ مطلوب است تعیین معادله‌های مجانبهای منحنی تابع $y = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$

حل: چون $x^۲+۱ \neq ۰$ پس منحنی مجانب قائم ندارد. همچنین منحنی مجانب افقی ندارد زیرا:

$$\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

برای تعیین معادلهٔ مجانب مایل باید m و h راپیدا کنیم به‌قسمی که:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} \text{ و } h = \lim_{x\to+\infty} (y - mx) \text{ یا } m = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} \text{ و } h = \lim_{x\to-\infty} (y - mx)$$

به ترتیب چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} = \frac{x}{|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}}$$

$$m_۱ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = ۱$$

$$m_۲ = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = -۱$$

$$h_۱ = \lim_{x\to+\infty} (y - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲ - x\sqrt{x^۲+۱}}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۴ - x^۴ - x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}\,(x^۲ + x\sqrt{x^۲+۱})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+x\sqrt{x^2+1})} = 0$$

$$h_2 = \lim_{x\to-\infty} (y+x) = \ldots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2-x\sqrt{x^2+1})} = 0$$

پس معادله‌های مجانبهای مایل منحنی عبارتند از:

$y=x$ و $y=-x$

مثال ۴ ــ مطلوب‌است تعیین معادله های مجانبهای منحنی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$

حل: منحنی مجانب قائم ندارد، مجانب افقی نیز ندارد زیرا:

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to\pm\infty \end{cases}$$

اگرمعادلهٔ مجانب مایل $y=mx+h$ باشد، از حذف y بین:

$y=mx+h$ و $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$

نتیجه می‌شود:

$$x^3-3x^2+1=m^3x^3+3m^2hx^2+3h^2mx+h^3$$
$$(m^3-1)x^3+3x^2(m^2h+1)+\cdots\cdots=0$$

دو تا از ضرایب بزرگترین درجه را صفرمی‌گیریم:

$$\begin{cases} m^3-1=0 \\ m^2h+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ h=-1 \end{cases}$$

پس $y=x-1$ مجانب مایل منحنی تابع است.

تبصره ــ هرگاه دو منحنی (C) و (C') نمایش تابعهای $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ باشند وداشته‌باشیم:

$$\lim_{x\to+\infty} |y_1-y_2|=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} |y_1-y_2|=0$$

دو منحنی را مجانب یکدیگر گوئیم.

مثال ــ منحنیهای نمایش دو تابع $y_1=x^2+\frac{1}{x+1}$ و $y_2=x^2$ مجانب یکدیگرند

زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} |y_1-y_2| = \lim_{x\to\pm\infty} \left|\frac{1}{x+1}\right| = 0$$

تمرین

معادلات خطوط مجانب هریك از تابعهای زیر را تعیین کنید.

۱) $y=\dfrac{x-3}{x-2}$

۲) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

۳) $y=\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}$

۴) $y=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-4}$

۵) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-9}$

۶) $y=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

۷) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+2$

۸) $y=x-1+\sqrt{x^2-4x+2}$

۹) $y=x+2-\sqrt{x^2+2x+3}$

۱۰) $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

۱۱) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x-1}$

۱۲) $y=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

۱۳) $y=\sqrt[3]{x^3+x}$

۱۴) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

۱۵) $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

۱۶) $y=x\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$

۱۷) $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

۱۸) $y=\sqrt{\dfrac{x^4-1}{x^2-4}}$

۱۹) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-7}{x-2}}$

۲۰) $y=\mathrm{Arctg}\,x$

۲۱ – تحقیق کنید منحنی (C') به معادلهٔ $y_2=\dfrac{x^2+1}{x}$ مجانب منحنی (C) بـه معادلهٔ $y_1=\dfrac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}$ می‌باشد،ضمناً تحقیق کنید دو منحنی دارای خطـوط مجانب مشترکند و معادلات آن خطوط را تعیین کنید.

۲۲- تابع با ضابطهٔ $y_1=\frac{ax^2+bx+c}{x+2c}$ مفروض‌است:

الف ـ پارامترهای a و b و c را چنان تعیین کنید که منحنی این تابع دارای مجانبهایی به معادلات $x+4=0$ و $y-x+1=0$ باشد.

ب ـ مجانبهای منحنی تابع $y=\frac{1}{y_1}$ را به‌ازاء مقادیرحاصلهٔ a و b وc که‌در فرض‌الف بدست‌آمده است تعیین کنید.

۲۳- تابع زیر مفروض است:

$$y=2x+a+\sqrt{ax^2+bx+3}$$

الف ـ پارامترهای a و b را چنان تعیین کنید که منحنی تابع فوق وقتی $x\to+\infty$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $y=4x+3$ باشد.

ب ـ به ازای مقادیر حاصلهٔ a و b مجانب دیگر تابع را تعیین‌کنید.

۲۴- به فرض اینکه t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و داشته باشیم:

الف: $\begin{cases} x=\frac{t^3}{t^2+1} \\ y=\frac{t^2}{t+1} \end{cases}$ ب: $\begin{cases} x=\frac{t+2}{t^2-t} \\ y=\frac{t}{1-t^2} \end{cases}$ ج: $\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^3} \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

خواهیم داشت $y=f(x)$، مطلوبست تعیین معادلات خطوط مجانب منحنی تابع $y=f(x)$

۲۵- تابع $y=ax+b+\sqrt{(px+q)^2+1}$ (که درآن $p>0$) مفروض است.

تحقیق کنید منحنی این تابع دارای دو مجانب به معادله‌های ذیل است:

$$\begin{cases} Y_1=ax+b+(px+q) \text{ ، } x\to+\infty \\ Y_2=ax+b-(px+q) \text{ ، } x\to-\infty \end{cases}$$

(راهنمائی : حد $|y-Y_1|$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ تعیین کنید) .

۲۶- تابع $y=ax+b-\sqrt{(px+q)^2+1}$ که درآن $p>0$ مفروض است.

تحقیق کنید منحنی این تابع دارای دو مجانب به معادله‌های ذیل است:

$$\begin{cases} Y_1=ax+b+(px+q) \text{ ، } x\to-\infty \\ Y_2=ax+b-(px+q) \text{ ، } x\to+\infty \end{cases}$$

۲۷ـ در تابع $y = ax + b - \sqrt{x^2 - 2x}$ ضرایب a و b را چنان تعیین کنید وقتی که $x \to +\infty$ مقدار تابع $y = 1$ شود.

خطوط مجانب منحنیهای هریك از توابع ذیل را به‌کمك دستورهائی که از حل مسئلهٔ ۲۵ و ۲۶ یاد گرفتید تعیین کنید.

۲۸) $y = x - 3 + \sqrt{x^2 - 4x}$ 　　 ۲۹) $y = 3x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$

۳۰) $y = 2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 12x}$ 　　 ۳۱) $y = 2x - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

۳۲) $y = 3x - \sqrt{9x^2 + 9x - 1}$ 　　 ۳۳) $y = 2 + \sqrt{x^2 + 1}$

۳۴) $y = \sqrt{x^2 - 4x}$ 　　 ۳۵) $y = -x + 2 - \sqrt{x^2 - 1}$

۳۶ـ تابع باضابطهٔ $y = mx + n + \sqrt{x^2 - 6x}$ مفروض است.

الف ـ m و n را چنان تعیین کنید که منحنی تابع وقتی $x \to +\infty$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $y = 2x - 2$ باشد.

ب ـ به ازاء مقادیر حاصل n و m مجانب دیگر منحنی را تعیین کنید.

۳۷ـ معادله مجانب مایل هریك ازتوابع زیر را تعیین نموده وضعیت منحنی نمودار هر تابع را بامجانب مایل آن بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x - 1)^2}$$

فصل ۵

رسم نمودار هندسی یك تابع حقیقی

۵-۱- برای رسم نمودار یك تابع عددی بامتغیر حقیقی بایدبه‌ترتیب زیرعمل نمود.

۱ـ تعیین دامنه تعریف، و تعیین فواصلی‌که تابع در آن فاصله‌هـا، پیوسته و مشتق پذیر است.

۲ـ تعیین زوج و فرد بودن تابع ازنقطه نظر تقارن نسبت به‌محور yها ومبـدأ مختصات و تشخیص متناوب بودن تابع (درصورت نیاز تعیین دوره تناوب).

۳ـ تعیین‌جهت تغییرات تابع: برای این‌کارمشتق تابع را حساب‌نموده وفواصلی راکه‌مشتق در آن فواصل مثبت یا منفی یاصفر است تعیین می‌کنیم.

۴ـ جدول تغییرات:

a- بررسی تابع درکرانه‌های، دامنه تعریف، وفواصل یکنوائی:

برای این‌کار مقدار تابع رادرکرانه‌های دامنه تعریف وکرانه‌های فواصلی که تابع در آن فاصله‌ها یکنوا، پیوسته است تعیین می‌کنیم.

b- تعیین مختصات نقاط مهم:

الف- تعیین مختصات نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات.

ب- درصورت امکان تعیین مختصات نقاط برخورد منحنی با مجانبهای افقی و مایل.

ج: تعیین مختصات نقاطی که مشتق درآن نقاط صفرشده و یا تغییرعلامت داده است‌ونقاطی که تابع درآن نقاط مشتق‌پذیر نیست (نظیر نقاط زاویه‌دار یا نقاط بازگشت).

د ـ درصورت امکان تعیین مختصات نقاط عطف.

c- تنظیم جدول تغییرات تابع:

برای این‌کار جدولی شامل سه‌سطر x و y' و y رسم نموده درسطر اول xهای بدست‌آمده را به‌ترتیب صعودی و درسطر دوم علامت مشتق ودرسطر سوم yهـای نظیر xها را نـوشته جهت تغییرات تابع را مشخص می‌کنیم.

۵ـ تعیین معادلات خطوط مجانب:

معادلات خطوط‌مجانب‌افقی،قائم،مایل‌تابع‌رادرصورت وجود تعیین و آنها را رسم می‌کنیم.

۶ـ نمودار تابع را ازروی جدول بکمك نقطه‌یابی بادقت رسم می‌کنیم.

مثال ۱ـ نمودار هندسی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = -x^{۳} + ۳x^{۲}$ را رسم کنید.

حل:

دامنهٔ تعریف تابع: $D_f = R$ است و تابع روی دامنهٔ تعریفش، پیوسته و مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) = -۳x^{۲} + ۶x = -۳x(x-۲)$ بازای دو مقدار صفر و ۲، صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

جدول تغییرات تابع:

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to-\infty}{\text{حد}} (-x^{۳}) = +\infty$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to+\infty}{\text{حد}} (-x^{۳}) = -\infty$$

$$f(۰) = ۰ \qquad f(۲) = ۴$$

$$x \in R \text{ و } f(x) = ۰ \qquad \text{جوابها}\begin{cases} x = ۰ \\ x = ۳ \text{ و } f'(۳) = -۹ \end{cases}$$

مجانبها:

داریم:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \underset{x\to+\infty}{\text{حد}} (-x^{۲} + ۳x) = -\infty$$

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \underset{x\to-\infty}{\text{حد}} (-x^{۲} + ۳x) = -\infty$$

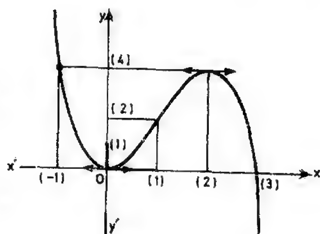
بنابراین نمودار تابع مجانب مایل ندارد.

نقطه عطف:

$$x \overset{f''}{\longmapsto} f''(x) = -۶(x-۱)$$

نقطه $H(۱,۲)$ نقطه عطف منحنی است.

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	۲	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		۰	$+$	۰	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	۴ $\searrow$	۰ $\nearrow$	۲ $\nearrow$	۴	$\searrow -\infty$



نکته: نقطه عطف منحنی درجه سوم، مرکز تقارن آن است.

مثال۲: نمودار هندسی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x - 2$ و $x \in R$ را رسم کنید

حل:

دامنه تعریف: $D_f = R$ و تابع روی R، پیوسته و مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1$ ، همواره مثبت است.

$f'(x) > 0$ و $(\forall x \in R)$ و تابع همواره صعودی است .

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{6} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{6}\right) = +\infty$$

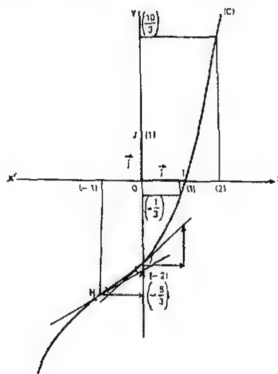
$f(0) = -2$ و $f'(0) = 1$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$			+		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-\frac{8}{3}$ ↗	$-\frac{1}{3}$ ↗	$\frac{10}{3}$ ↗	$+\infty$

مجانبها: تابع مجانب مایل ندارد.

نقطه‌عطف: مشتق ثانی تابع $f'': x \overset{f''}{\longmapsto} f''(x) = x + 1$ بازای $x = -1$ تغییرعلامت می‌دهد.
پس منحنی (C) یك نقطهٔ عطف $H(-1$ و $-\frac{8}{3})$ دارد که مرکز تقارن آن هم می‌باشد.

$f'(-1) = \frac{1}{2}$



مثال ۳: جهت تغییرات ومنحنی نمایش تابع با ضابطهٔ

$x \xmapsto{f} f(x) = x^۴ + x^۲ - ۲$ و $x \in R$ رارسم کنید .

حل ــ دامنه تعریف تابع: $D_f = R$ و تابع روی R ، پیوسته ومشتق پذیر است .

تابع f زوج است زیرا: $f(-x) = f(x)$ ، $(\forall x \in R)$.

در نتیجه تابع را در فاصله $[۰ \text{ و } +\infty[$ رسم نموده و قرینه آنرا نسبت به محورyها می کشیم .

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \xmapsto{f'} f'(x) = ۴x^۳ + ۲x = ۲x(۲x^۲ + ۱)$ و بازای $x = ۰$ تغییرعلامت می‌دهد.

جدول تغییرات:

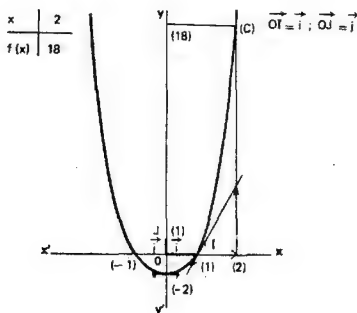
$$\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{حد}} x^۴ = +\infty$$

$$f(۰) = -۲$$

$$(\forall x \in R) : (f(x) = ۰ \Longleftrightarrow x^۴ + x^۲ - ۲ = ۰)$$

$$\begin{cases} x = ۱ \text{ و } f'(۱) = ۶ \\ x = -۱ \end{cases}$$

x	۰	۱	۲	$+\infty$
$f'(x)$	۰		+	
$f(x)$	$-۲ \nearrow$	$۰ \nearrow$	$۱۸ \nearrow$	$+\infty$



مثال۴: جهت تغییرات و منحنی نمایش تابع f باضابطهٔ $x \mapsto^{f} f(x) = x^۴ - ۸x^۲ + ۷$ و $x \in R$ را رسم کنید.

حل ــ دامنهٔتعریف تابع: $D_f = R$ است و تابع روی دامنه تعریفش پیوسته و مشتق‌پذیر است.

تابع f زوج است. در نتیجه نمودار تابع را درفاصله $[۰ \quad و \quad +\infty[$ رسم نموده و سپس قرینه آنرا نسبت به محورyها می کشیم.

جهت تغییرات: مشتق تابع، $x \mapsto^{f'} f'(x) = ۴x^۳ - ۱۶x = ۴x(x^۲ - ۴) = ۰$ بازای سه مقدار $x = ۰$ و $x = ۲$ و $x = -۲$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

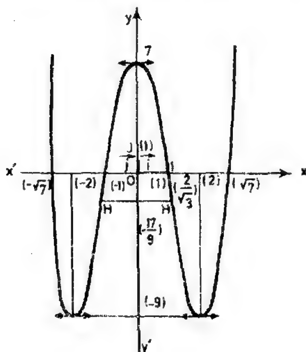
جدول تغییرات تابع:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^۴ = +\infty$$

$f(۰) = ۷ \qquad f(۲) = ۹$

$$(\forall x \in R) \text{ و } f(x) = ۰ \iff x^۴ - ۸x^۲ + ۷ = ۰ \begin{cases} x = ۱ & f'(۱) = -۱۲ \\ x = \sqrt{۷} & f'(\sqrt{۷}) = ۱۲\sqrt{۷} \\ x = -۱ \\ x = -\sqrt{۷} \end{cases}$$

x	۰		۱		۲		$\sqrt{۷}$		۳		$+\infty$
$f'(x)$	۰		−		۰				+		
$f(x)$	۷	↘	۰	↘	−۹	↗	۰	↗	۱۶	↗	$+\infty$



نقاط عطف تابع:

$x \mapsto^{f''} f''(x) = ۱۲x^۲ - ۱۶$ و

$H\begin{pmatrix} +\frac{۲}{\sqrt{۳}} \\ -\frac{۱۷}{۹} \end{pmatrix}$ و $H'\begin{pmatrix} -\frac{۲}{\sqrt{۳}} \\ -\frac{۱۷}{۹} \end{pmatrix}$ است.

مثال۵: جهت تغییرات و منحنی نمایش تابع f با ضابطهٔ ،

$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = -\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x$ و $x \in R$ را رسم کنید .

حل: دامنه تعریف تابع: $D_f = R$ و تابع روی دامنه تعریفش پیوسته و مشتق پذیر است.
جهت تغییرات: مشتق تابع ،

$$x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) = -6x^3 + 12x^2 + 6x - 12$$

$$f'(x) = -6x(x^2 - 1) + 12(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = -6(x - 2)(x^2 - 1)$$

بازای سه مقدار ۱ — و ۱ و ۲ صفر شده تغییرعلامت می‌دهد.

جدول تغییرات:

$$\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to -\infty}{\text{حد}} \left(-\frac{3}{2}x^4\right) = -\infty$$

$$\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{حد}} \left(-\frac{3}{2}x^4\right) = -\infty$$

$$f(-1) = \frac{19}{2} \text{ ،}$$

$$f(1) = -\frac{13}{2}$$

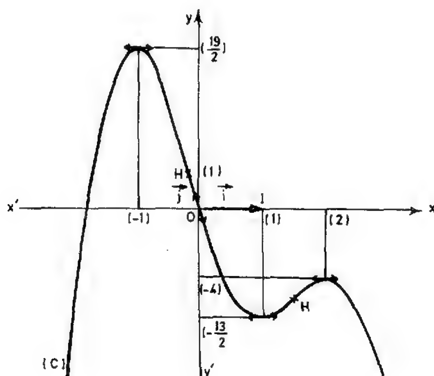
$$f(2) = -4$$

$$f(0) = 0 \text{ و } f'(0) = -12$$

$$(\forall x \in R) \text{ و } f(x) = 0 \iff -\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 12x = 0$$

x	$-\infty$	-2		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	-20	$\nearrow$	$\frac{19}{2}$	$\searrow$	$\frac{-13}{2}$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

مجانب: نمودار تابع مجانب مایل ندارد و شاخه بینهایت آن مانند سهمی در امتداد yy′ است.



نقاط عطف عبارتند از:

$$x \xrightarrow{f''} f''(x) = ۶(-۳x^۲ + ۴x + ۱)$$

$$(\forall x \in R) \text{ و } [f''(x) = ۰ \iff (x = \frac{۲+\sqrt{۷}}{۳} \text{ و } x = \frac{۲-\sqrt{۷}}{۳})]$$

تمرین:

جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = -۲x^۳ + ۶x - ۱$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{۱}{۶}x^۳ - ۲x - ۱$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = -x^۴ - ۳x^۲ + ۱۰$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x^۴ - ۲x^۳ - ۲x^۲ + ۳$$

نمودار تابع‌هموگرافیك $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ و $c\neq 0)$

مثال- جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x\overset{f}{\longmapsto}f(x)=\frac{-x-1}{2x-1}$ را رسم کنید.

حل- دامنه‌تعریف: $D_f=R-\{\frac{1}{2}\}$، تابع روی $]\frac{1}{2}, +\infty[$ و $]-\infty, \frac{1}{2}[$ پیوسته ومشتق‌پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع، $x\overset{f'}{\longmapsto}f'(x)=\frac{3}{(2x-1)^2}$ همواره مثبت است

جدول تغییرات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{2} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$$

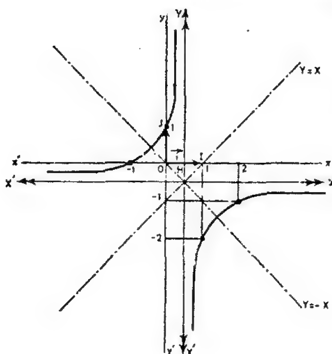
$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=+\infty$$

$f(0)=1$ و $f'(0)=3$

$(\forall x\in D_f)$ و $f(x)=0 \Longleftrightarrow -x-1=0$ ، $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		‖	$+$		
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-2 ↗	-1 ↗	$-\frac{1}{2}$

تابع دارای دو مجانب به معادلات $y=-\frac{1}{2}$ و $x=\frac{1}{2}$ است.



نکته: نمودار هندسی تابع f با ضابطهٔ

$x\overset{f}{\longrightarrow}f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ و $x\in R$

یك هذلولی است که نقطهٔ H محل تلاقی مجانبهای آن مرکز تقارن و خطوط به معادلات

$y=x+\frac{a+d}{c}$ و $y=-x+\frac{a-d}{c}$

محورهای تقارن آن هستند.

نمودار تابع: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$ ، $a\neq 0$ و $b'\neq 0$

مثال ۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$

دامنه تعریف تابع: $D_f=R-\{4\}$ است،

پس تابع به‌ازای همه مقادیر x به استثنای $x=4$ معین، پیوسته و مشتق پذیر است.

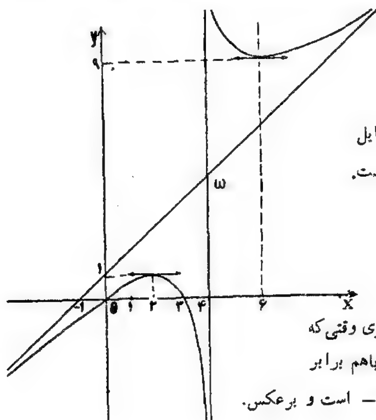
جهت تغییرات: مشتق تابع $y'=\dfrac{x^2-8x+12}{(x-4)^2}$ در ازای دو مقدار $x=2$ و $x=6$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد، پس‌تابع یك ماکزیمم ویك می‌نیمم دارد.

جدول تغییرات: در ازای $x=0$ داریم $y=0$ و درازای $y=0$ داریم $x=0$ یا $x=3$ هرگاه $x\to\pm\infty$ داریم $y\to\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$		۰	۲		۳		۴		۶	$+\infty$
y'		+		۰	−			‖	−	۰	+
y	$-\infty$	↗	۰ ↗	۱	↘	۰ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$	↘	۹	↗ $+\infty$

مجانب: منحنی نمایش تابع دارای مجانب قائم $x=4$ است. برای تعیین مجـانب مایل، تابع را چنین می‌نویسیم:



$$y=x+1+\frac{4}{x-4}$$

پس خط به معادله $y=x+1$ مجانب مایل منحنی است. شکل منحنی به‌شرح زیر است.

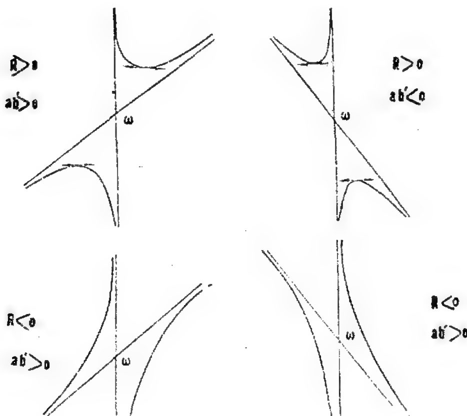
نکته: حد چپ و راست توابع کسری وقتی‌که x به‌سمت ریشه سادهٔ مخرج میل می‌کند باهم برابر نیستند اگریکی $+\infty$ باشد دیگری $-\infty$ است و برعکس.

تبصره ۱: در تابع $y=\frac{ax^{۲}+bx+c}{b'x+c'}$ ، a و $b'\neq ۰$

اگر R مبین سه جمله‌ای صورت مشتق تابع اصلی، یعنی مبین سه جمله‌ای صورت کسر:

$$y'=\frac{ab'x^{۲}+۲ac'x+(bc'-cb')}{(b'x+c')^{۲}}$$

مثبت باشد تابع دارای یك ماکزیمم و می‌نیموم است و اگر $R<۰$ باشد تابع ماکزیمم و می‌نیموم ندارد منحنی همواره نسبت به نقطهٔ ω محل برخورد مجانبها متقارن است و نمودار منحنی به‌صورت یکی از اشکال چهارگانهٔ زیر است

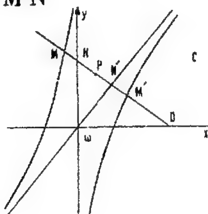


تبصره ۲- اگر خط غیر مشخص D منحنی (C) نمایش هندسی تابع با ضابطهٔ

$$y=\frac{ax^{۲}+bx+c}{b'x+c'}$$

را در دونقطه M و M' و مجانبهای آن را در نقطه‌های N و N' قطع کند، همواره:

$$MN=M'N'$$



برهان: کافی است ثابت کنیم که وسط MM' بر وسط NN' منطبق است.

تمرین

مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیر:

$$1)\quad y=\frac{x^2-4x+3}{3x-1} \qquad\qquad 2)\quad y=x+1+\frac{4}{x+1}$$

$$3)\quad y=x-1-\frac{4}{x-1} \qquad\qquad 4)\quad y=|x-2|+\frac{4}{x-2}$$

نمودار تابع $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ و $a'\neq 0$ و $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

مثال ۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$

حل- دامنه تعریف: $D_f=R$ است زیرا مخرج کسر ریشه ندارد.

پس تابع همواره معین وپیوسته ومشتق پذیر است.

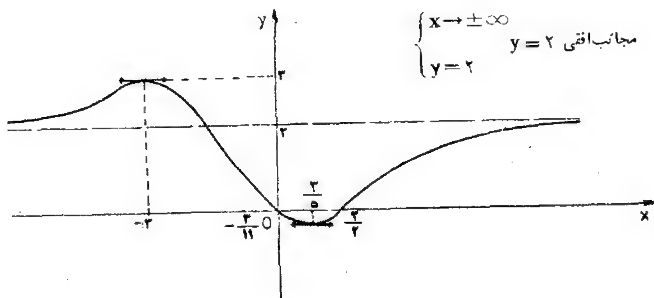
جهت تغییرات: مشتق تابع:

$$y'=\frac{5x^2+12x-9}{V^2} \qquad y'=0 \implies \begin{cases} x=-3 \ \text{یا}\ x=\dfrac{3}{5} \\ y=3 \ \text{و}\ y=-\dfrac{3}{11} \end{cases}$$

بازای دو مقدار $x=-3$ و $x=\dfrac{3}{5}$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		+	0		−		0	+			
y	2	↗	3	↘	0 ↘		$-\frac{3}{11}$	↗	0	↗	2

$$\begin{cases} x=0 \ \text{یا}\ x=\dfrac{3}{2} \\ y=0 \end{cases}$$



مثال ۲ـ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ

$$y=\frac{x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۴x+۵}$$

حل ـ دامنه‌تعریف: $D_f=R$ است‌زیرا مخرج کسر ریشه ندارد پس تابع دردامنه‌تعریفش پیوسته ومشتق‌پذیر است.

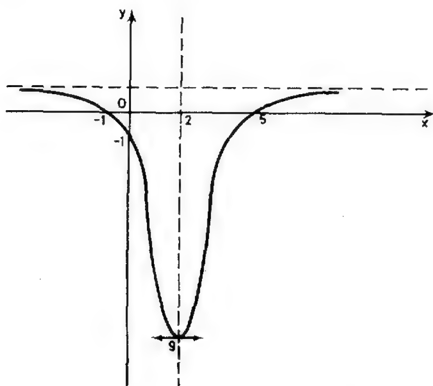
جهت تغییرات: مشتق تابع $y'=\frac{۲۰x-۴۰}{v^{۲}}$ بازای $x=۲$ و $y'=۰\begin{cases}x=۲\\ y=-۹\end{cases}$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

جدول تغییرات: $\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=۱\end{cases}$ $\begin{cases}x=-۱ \text{ و } ۵\\ y=۰\end{cases}$ $\begin{cases}x=۰\\ y=-۱\end{cases}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		۵		$+\infty$
y'				—			۰		+		
y	۱	↘	۰	↘	-۱	↘	-۹	↗	۰	↗	۱

مجانب: خط $y=۱$ مجانب افقی است.



خط $x=۲$ محور تقارن منحنی است.

مثال ۳ــ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ $y=\frac{x^2-4x}{x^2-2x+1}$

حل ــ دامنه تعریف: $D_f=R-\{1\}$ زیرا مخرج ریشه مضاعف $x'=x''=1$ دارد.
پس تابع روی فاصلهٔ $]+\infty$ و $1[$ و $]1$ و $-\infty[$ پیوسته ومشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع $y'=\frac{2x^2+2x-4}{(x-1)^4}=\frac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)^4}$

بازای دو مقدار $x=1$ و $x=-2$ تغییر علامت می‌دهد.

جدول تغییرات: $y'=\frac{2(x+2)}{(x-1)^3}$ ، $y'=0\begin{cases}x=-2\\ y=\frac{4}{3}\end{cases}$

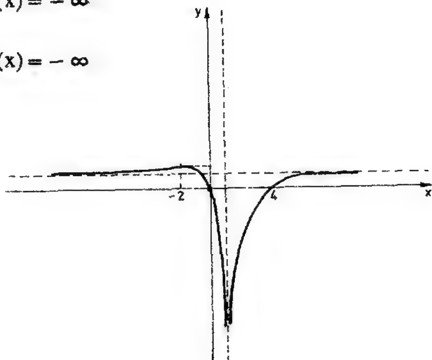
تابع درازای $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و فقط یك ماکزیمم دارد.

$\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=1\end{cases}$ ، $\begin{cases}x\to 1\\ y\to-\infty\end{cases}$ ، $\begin{cases}x=0 \text{ و } 4\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x\to 1\\ y\to-\infty\end{cases}$

x	$-\infty$		-2		0		1			4		$+\infty$
y'		+	0		−		‖			+		
y	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$		↗	0	↗	1

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ حد

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ حد



مثال۴ـ نمودار تابع f با ضابطهٔ $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{x^۲ - ۲x - ۳}{x^۲ - ۲x + ۱}$ را رسم کنید.

حل ـ دامنه تعریف: $D_f = R - \{۱\}$ زیرا مخرج ریشه مضاعف $x' = x'' = ۱$ دارد.
پس تابع روی $]-\infty, ۱[$ و $]۱, +\infty[$ پیوسته ومشتق پذیر است.
جهت تغییرات: مشتق تابع بازای $x = ۱$ تغییرعلامت می‌دهد. ولی تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست.

جدول تغییرات :

$$y' = \frac{۸}{(x-۱)^۳}$$

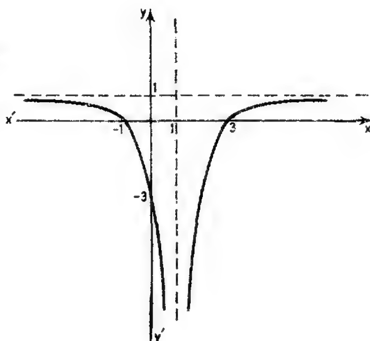
$\begin{cases} x \to ۱ \\ y \to -\infty \end{cases}$ ، $\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y = ۱ \end{cases}$ ، $\begin{cases} x = -۱ \text{ یا } ۳ \\ y = ۰ \end{cases}$ ، $\begin{cases} x = ۰ \\ y = -۳ \end{cases}$

x	$-\infty$	-۱	۰		۱		۳	$+\infty$
y'		−				+		
y	۱ ↘	۰ ↘	−۳ ↘	$-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۰ ↗	۱

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = -\infty$$



خط $x = ۱$ محور تقارن نمودار تابع است.

نکته: حد چپ وراست تابع کسری وقتی که x به سمت ریشه مضاعف مخرج میل می‌کند متحدالعلامه‌اند یعنی یا هردو $+\infty$ یا هردو $-\infty$ هستند.

مثال۵- نمودار هندسی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{x}{۲x^۲ - ۵x + ۲}$ و $x \in R$ را رسم کنید.

حل: دامنه تعریف: تابع در نقاط به طولهای $x = ۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ منفصل است.

ودامنه تعریف تابع عبارت است از:

$$D_f =]-\infty \text{ و } \frac{۱}{۲}[\, \cup \,]\frac{۱}{۲} \text{ و } ۲[\, \cup \,]۲ \text{ و } +\infty[$$

جهت تغییرات: مشتق تابع $f'(x) = \frac{۲x^۲ - ۵x + ۲ - x(۴x - ۵)}{(۲x^۲ - ۵x + ۲)^۲} = \frac{-۲(x^۲ - ۱)}{(۲x^۲ - ۵x + ۲)^۲}$

بازای $x = ۱$ و $x = -۱$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

$x = -۱$ و $f(-۱) = -\frac{۱}{۹}$

$x = ۱$ و $f(۱) = -۱$

مجانبها:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{۲x^۲} = \lim_{x \to \infty} \frac{۱}{۲x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۰^- \text{ ، } \lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰^+$$

جدول تغییرات:

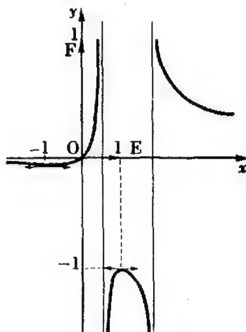
x	$-\infty$		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲		$-\infty$
y'		$-$	۰	$+$		$+$	‖	$+$	۰	$-$	‖	$-$	
y	۰	↘	$-\frac{۱}{۹}$	↗	۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۰

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^-} f(x) = \frac{\frac{۱}{۲}}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^+} f(x) = -\infty$$



مثال۶- جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x^2+2|x|}{x^2+6x+5}$ را رسم کنید.

به ازاء $x \geqslant 0$ داریم $|x|=x$ و به ازاء $x<0$ داریم $|x|=-x$

پس باید تغییرات دو تابع زیر را بررسی کرد:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{x^2+2x}{x^2+6x+5} \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y_2=\dfrac{x^2-2x}{x^2+6x+5} \\ x<0 \end{cases}$$

تابع y_1 همواره پیوسته است و مشتق آن مثبت است.

$$y_1'=\frac{4x^2+10x+10}{V^2}>0 \qquad \begin{cases} x=0 \\ y_1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\to+\infty \\ y=1 \end{cases}$$

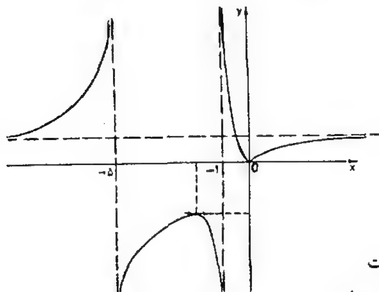
تابع y_2 در ازاء $x=-1$ و $x=-5$ نامعین و در ازای سایر مقادیر x معین و پیوسته است:

$$y_2'=\frac{8x^2+10x-10}{V^2}=0 \Rightarrow x=\frac{-5-\sqrt{105}}{8}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\to-1 \text{ و } -5 \\ y_2\to\pm\infty \end{cases} \quad \begin{cases} x\to-\infty \\ y_2=1 \end{cases}$$

تغییرات دو تابع رادر یک جدول خلاصه می‌کنیم:

x	$-\infty$		-5		$\frac{-5-\sqrt{105}}{2}$		-1		0		$+\infty$
y'		+	‖	+	0	−	‖	−	‖	+	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{8}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0 ‖ 0	↗	1



تابع درازای $x=0$ می‌نیمم است

اما مشتق آن در ازاء $x=0$ نامعین است.

۵ — ۲ — بعضی از خواص تابع : $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (درحالتی که لااقل a یا a' مخالف صفر باشد).

۱ـ هرگاه تابع فوق دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیموم باشد و منحنی (c) نمایش تابع را با خط دلخواهی‌موازی محورxها قطع کنیم تا منحنی‌را در دو نقطه M و N قطع کند. تصاویر M و N و تصاویر نقاط C و D، ماکزیمم و می‌نیموم تابع ، روی محورxها تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

۲ـهرگاه‌منحنی(C) را با خط $y=m$ موازی محورxها قطع کنیم همواره بینx' وx'' طول نقاط برخورد خط و منحنی رابطهٔ مستقلی از m برقرار است.

تعیین عرضهای ماکزیمم ومی‌نیموم تابع بدون استفاده از مشتق

هرگاه خط Δ موازی محورxهاو به‌معادلهٔ $y=m$ باشد از حل دستگاه دو معادلهٔ:

$$\begin{cases} y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \\ y=m \end{cases}$$

خواهیم داشت :

$$(ma'-a)x^2+(mb'-b)x+(mc'-c)=0 \quad (I)$$

معادلهٔ (I) طول‌های نقاط برخوردخط $y=m$ ومنحنی (C)می باشد حال‌هرگاهΔ_1 مبین این معادله مثبت باشد معادله دوجواب ودر نتیجه خط منحنی را در دونقطهٔ متمایز قطع می کند.

هرگاه Δ_1 مبین معادله را صفرقراردهیم،معادله(I) دارای‌ریشهٔ مضاعف بوده وخط برمنحنی مماس است. یعنی ریشه‌های معادله (II) $\Delta_1\equiv(mb'-b)^2-4(ma'-a)(mc'-c)=0$ که برحسب m از درجهٔ دوم است عرض‌های نقاط ماکزیمم ومی‌نیموم می‌باشند. البته بایدتوجه داشت که این ریشه ضریب x^2 را در معادلهٔ (I) صفر نکند، زیرا درآن حالت معادله (I) به یك معادلهٔ درجهٔ یك تبدیل می‌شود و مبین معنی ندارد.

طولهای نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیموم عبارتست از: $x=\frac{-(mb'-b)}{2(ma'-a)}$ ریشهٔ‌مضاعف معادلهٔ(I)که درآن بجای m بـه‌ترتیب مقادیر y_1 و y_2 ریشه‌های معادلهٔ(II) را قرار می‌دهیم.

تبصره- درموقع محاسبهٔ عرض ماکزیمم و می‌نیموم تـابع $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توان‌ریشه‌های مشتق را به‌جای اینکه درکسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ قراردهیم‌درکسر $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (بەشرط اینکه $g(x)$ و $g'(x)$ به ازای آن‌مقدار صفر نباشد) قراردهیم زیرا:

$$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

طول ماکزیمم و می‌نیمموم ریشه‌های صورت مشتق است یعنی: $f'(x)\cdot g(x) = g'(x)\cdot f(x)$

چون $g(x)$ و $g'(x)$ صفر نیست طرفین را بر $g(x)\cdot g'(x)$ تقسیم می‌کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال

جهت تغییرات ومنحنی تابع $x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ و $x\in R$ را رسم کنید.

دامنه تعریف: $D_f = R-\{1\}$ و تابع در $]-\infty , 1[$ و $]1 , +\infty[$ پیوسته ومشتق‌پذیر است.

جهت تغییرات: تابع درنقطه یك مشتق‌پذیر نیست و مشتق تابع بازای $x=0$ ، صفر شده ولی تغییرعلامت نمی‌دهد. و بازای $x=3$ تغییرعلامت می‌دهد.

$$x \xrightarrow{f'} f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

جدول تغییرات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1} |f(x)| = +\infty$$

$$f(0)=0 \qquad f(3)=\frac{27}{4}$$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

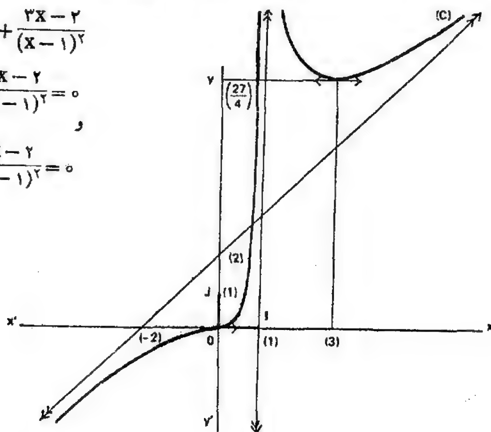
مجانبها: خط $x=1$ مجانب قائم و خط $y=x+2$ مجانب مایل آن است زیرا:

$$f(x)=x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$$

و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$$



تمرین:

جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

۱) $y=\frac{2x}{x^2+1}$

۲) $y=\frac{x^2-1}{x^2+x+1}$

۳) $y=\frac{x^2-1}{5x^2-4x}$

۴) $y=\frac{x^2-1}{(x-2)^2}$

۵) $y=\frac{2x^2+1}{x^2+2x}$

۶) $y=\frac{2x^2+8x+7}{x^2+4x+3}$

۷) $y=\frac{(x+1)^2}{2x(x-1)}$

۸) $y=\frac{4x^2-3x+2}{3(x^2-1)}$

۹) $y=\frac{3(x-1)^2}{2x(x-3)}$

۱۰) $y=\frac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

۱۱) $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

۱۲) $y=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}$

۱۳) $y=\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}$

۱۴) $y=\frac{-6x+6}{x^2+3}$

۱۵) $y=\frac{(x-1)^2}{x^2-2}$

۱۶) $y=\frac{x^2+2|x-1|+5}{x^2-2x-3}$

۱۷) $y=\frac{|x^2-4x|}{x^2-4x+3}$

۱۸) $y=\frac{3x^2-1}{x^3}$

۱۹) $y=\frac{x^3-3x-2}{x^2}$

۲۰) $y=\frac{x^3+4}{x^2}$

۲۱) $y=\frac{x^3+3x+1}{x^2}$

۲۲) $y=\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$

۲۳ـ تابع باضابطه $y=\frac{x^2-2ax+1}{x^2-2bx+1}$ که درآن $a\neq b$ است مفروض است:

الف ـ چه رابطه ای بین a و b برقرار باشد تا $M+m=0$ (M ماکزیمم و m می‌نیموم تابع است).

ب ـ به فرض $a=5$ و $M+m=0$ جدول تغییرات تابع را پس از تعیین پارامترهـا تعیین ومنحنی آنرا رسم کنید.

۲۴- اگر A و B تصاویر نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x^2-2}$ روی محورxها و C و D تصاویر نقاط تلاقی خط $y=m$ با منحنی تابع فوق روی محورxها باشند، نشان دهید که چهار نقطهٔ D و C و B و A روی محور xها تشکیل یك تقسیم توافقی می‌دهند.

۲۵- تابع $y=\frac{x}{x^2-5x+4}$ مفروض است.

الف- منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

ب- اگر A و B دو نقطه از منحنی باشندکه مماس در آنها موازی محورxها باشد و A و Bرا بهم بپیوندیم تا خط حاصل منحنی‌را درنقطهٔ دیگری مانند C قطع کند. مطلوبست مختصات نقطهٔ C.

ج- معادلهٔ مماس در C را بنویسید. اگر خط اخیر منحنی را در D قطع کند مختصات نقطه D را نیز بنویسید.

۲۶- اولاً مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی (C) نمایش تابع:

$$y=\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

ثانیاً اگر L نقطه برخورد منحنی (C) بامجانب آن باشد معادلهٔ خطوطی راکه با ضریب زاویه‌ای m می‌باشند و از L گذشته‌اند بنویسید هرگاه M_1وM_2 دو نقطهٔ دیگر برخورد خط مذکور بامنحنی (C) باشند حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که دو نقطه برخورد دیگروجود داشته باشد. در حالت مخصوص که M_1 بر M_2 منطبق است مقادیر m را تعیین و مواضع M_1 یا M_2 را مشخص کنید.

۲۷- در تابع $y=\frac{x^2+ax+10}{x+b}$ مقادیر a و b را چنان‌تعیین کنید که $\omega(1,0)$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع باشد. پس از تعیین a و b منحنی را رسم کنید.

۲۸- تابع $x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x^2+3x+4m}{x^2+(5m+1)x+3}$ و $x\in R$ مفروض است

اولا: ثابت کنید

بازاء مقادیر مختلف m دسته منحنی‌های (C_m) نمودارتابع فوق ازسه‌نقطه ثابت که مختصات آنها را تعیین خواهید نمود می‌گذرند.

ثانیاً: m را چنان معین کنید که نقطه تلاقی منحنی (C) باخط مجانب افقی نقطه‌ای به‌طول $\frac{3}{2}$ باشد.

۲۹- اولاً تغییرات تابع $y=\frac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۱}$ را تعیین و منحنی T نمایش آنرا رسم کنید.

ثانیاً- اگر خط $y=\lambda$ موازی محور xها منحنی T را در M و M′ قطع کند مختصات P وسط MM′ را برحسب پارامتر λ بنویسید معادلهٔ E مکان هندسی نقاط P را نیز تعیین کنید و منحنی E را درهمان دستگاه مختصات رسم کنید.

۳۰- تابع $y=\frac{۲x(x-m)}{x^۲+x-۶}$ مفروض است.

۱) حدود m راچنان تعیین کنید که تابع فوق دارای ماکزیمم ومی‌نیمم باشد.

۲) به ازاء $m=۰$ منحنی T نمایش‌تابع را رسم کنید.

۳) هرخط غیر مشخص D که ازمبدأ مختصات بگذرد منحنی T را معمولاً در دو نقطهٔ دیگر M و M′ قطع می کند. اگر P وسط قطعهٔ خط MM′ باشد نشان دهید که مجموعهٔ E متشکل از نقاط P قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۲x}{۱+۲x}$ می باشد . منحنی E را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۳۱- تابع $y=\frac{x^۲+ax+b}{x^۲+۲}$ مفروض است ثابت کنیدبازاء همهٔ مقادیر a وb $(a\neq ۰)$ این تابع دارای‌یك ماکزیمم ویك‌می‌نیمم‌است. a و b راچنان معین کنید که مجموع طولهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم برابر (-۱) وحاصلضرب‌عرضهای‌نقاط ماکزیمم و می‌نیمم برابر (-۲) باشد. سپس منحنی (C) نمایش تابع $y=\frac{x^۲-۴x}{x^۲+۲}$ را رسم کنید. اگر خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B وخط $x=-\frac{۱}{۲}$ را در نقطه P قطع کند ثابت کنید که بازاء همهٔ مقادیر m حاصلضرب $PA\times PB$ مقدار ثابتی است.

۳۲- تابع $y=\frac{x^۳+a}{(b+۱)x^۲-b}$ مفروض‌است. a وb را چنان معین کنید که نقطه $M(۳و۲)$ نقطه می‌نیمم منحنی‌تابع فوق باشد. سپس جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع، $y=\frac{x^۳+۴}{x^۲}$ را رسم کنید.

۳۳- تابع $y=\frac{x^۲+۴}{۲ax+۳}$ مفروض‌است a راچنان‌معین کنید که تفاضل عرضهای‌نقاط‌ماکزیمم و می‌نیمم تابع برابر (۵) باشد.

تابعهای گنگ

۵-۳ تعریف – تابع $y=f(x)$ را گنگ گوییم درصورتی که عبارت $f(x)$ نسبت به x گنگ باشد .

تابعهای

$$y=x-2\sqrt{x-1}$$

$$y=x+\sqrt{2-x^2}$$

$$y=x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$y=2x-\sqrt{x^2-1}$$

$$y=\sqrt{x}+\sqrt{4-2x}$$

$$y=\sqrt[3]{x^2-3x}$$ گنگ هستند

توجه: هروقت یك معادلهٔ اصم‌حل کردید جوابهای بدست‌آمده را امتحان کنید زیرا ممکن است جواب خارجی وارد معادله شده باشد .

مثال۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع :

$$y=3-\sqrt{-x^2+4}$$

دامنه تعریف تابع: $D_f = -x^2+4 \geqslant 0$ یا $D_f=[-2 \text{ و } 2]$ است تابع در دامنه تعریفش پیوسته و روی $]-2 \text{ و } 2[$ مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{-x^2+4}}\ ,\ y'=0:\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

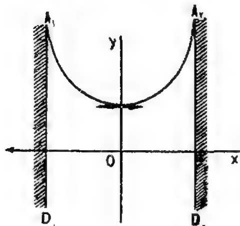
$$\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases} \text{ و } \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$$

بازای $x=0$، صفر شده تغییرعلامت می‌دهد.

x	-2		0		2
y'	∞	$-$	0	$+$	∞
y	3	↘	1	↗	3

معادلهٔ $y=0$ ریشه ندارد.

نمودار فوق نیمدایره است که‌در A_1 و A_2 بر D_1 و D_2 مماس است. و A_1 و A_2 را نقاط توقف منحنی می گویند.



مثال۲ـ جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ

$x \xrightarrow{f} f(x)=x-2+\sqrt{-x^2+4x}$ را رسم کنید.

دامنه تعریف تابع: $D_f = -x^2+4x \geqslant 0$ یا $D_f=[0, 4]$ و در فاصله $]0, 4[$ مشتق پذیراست.

تابع به‌ازای مقادیر فاصلهٔ $[0, 4]$ معین و پیوسته است.

جهت تغییرات: مشتق تابع پس ازساده‌کردن می‌شود:

$$y'=\frac{-x+2+\sqrt{-x^2+4x}}{\sqrt{-x^2+4x}}$$

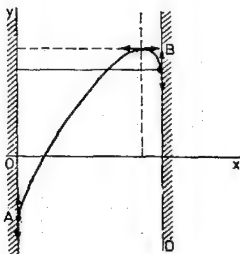
معادلهٔ $y'=0$ یعنی $-x+2+\sqrt{-x^2+4x}=0$ دوریشهٔ $2+\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{2}$ دارد که درآن $2-\sqrt{2}$ ریشهٔ خارجی است و ریشهٔ مشتق تنها عدد $2+\sqrt{2}$ است.

از معادلهٔ $y=0$ برای x دوعدد $2+\sqrt{2}$ و $2-\sqrt{2}$ بدست می‌آید که‌در آن $2+\sqrt{2}$ خارجی و ریشهٔ واقعی معادله $2-\sqrt{2}$ است. بنابراین داریم:

$$y'=0: \begin{cases} x=2+\sqrt{2} \\ y=2\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2-\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$$

برای تعیین علامت مشتق درهرفاصله عددی راکه ریشهٔ مشتق نباشد در مشتق قراردهید تاعلامت مشتق به ازای آن معلوم شود.

x	0		$2-\sqrt{2}$		$2+\sqrt{2}$		4
y'	∞		$+$		0	$-$	∞
y	-2	↗	0	↗	$2\sqrt{2}$	↘	2



منحنی نیم بیضی است وبرمحور yها وبر خط D مماس است.

نقاط A و B را نقاط توقف منحنی می گویند.

مثال۳ـ جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x \xrightarrow{f} f(x) = x - 2 - \sqrt{x-4}$ را رسم کنید.

دامنه تعریف تابع: $D_f = x - 4 \geqslant 0$ ، یا $D_f = [4 , +\infty[$

تابع به‌ازای $x \geqslant 4$ معین وپیوسته است ودر فاصله $]4 , +\infty[$ مشتق‌پذیر است.

جهت تغییرات‌تابع: مشتق تابع بازای $x = \frac{17}{4}$، صفر شده تغییرعلامت می‌دهد.

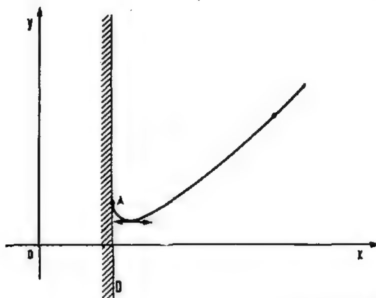
$$y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x-4}} = \frac{2\sqrt{x-4} - 1}{2\sqrt{x-4}} \qquad y' = 0 : \begin{cases} x = \frac{17}{4} \\ y = \frac{7}{4} \end{cases}$$

این معادله ریشه ندارد پس منحنی محورxها را قطع نمی‌کند. $x - 2 - \sqrt{x-4} = 0$

$x^2 - 5x + 8 = 0$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$$

x	4		$\frac{17}{4}$		∞
y'	∞	$-$	0	$+$	
y	2	↘	$\frac{7}{4}$	↗	$+\infty$



منحنی در A بر خط D مماس است.

مجانب:
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2 - \sqrt{x-4}}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (x - 2 - \sqrt{x-4} - x) = -\infty$$

نمودار مجانب مایل ندارد ولی دارای راستای مجانب به‌معادله $y = x$ خواهد بود ونقطه A رانقطه توقف میگویند.

مثال ۴- جدول تغییرات ومنحنی تابع زیررا رسم کنید.

$$x\in R \;\text{و}\; x \overset{f}{\longmapsto} f(x)=۵x+۳\sqrt{x^۲-۱}$$

دامنهٔ تعریف:

$$D_f = (]-\infty \;\text{و}\; -۱] \cup [۱ \;\text{و}\; +\infty[)$$

تابع روی]∞ + و ۱] و [۱- و ∞ -[معین و پیوسته و روی]∞ + و ۱[و]۱- و ∞ -[مشتق پذیراست.

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x)=۵+\dfrac{۳x}{\sqrt{x^۲-۱}}$ است وعلامت مشتق اگر $x>۱$ باشد داریم $f'(x)>۰$ واگر $x<-۱$ باشد داریم:

$$۵-\frac{۳x}{\sqrt{x^۲-۱}}>۰$$

$$f'(x)\times\left(۵-\frac{۳x}{\sqrt{x^۲-۱}}\right)=\frac{۱۶x^۲-۲۵}{x^۲-۱}$$

بنابراین علامت مشتق بستگی به‌علامت کسر طرف دوم دارد ومشتق‌بازای $x=-\frac{۵}{۴}$ صفر شده تغییرعلامت‌می‌دهد.

جدول تغییرات:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(۵-۳\sqrt{۱-\frac{۱}{x^۲}}\right)\right]=-\infty$$

$$f(-۱)=-۵ \;،\; \lim_{x\to-۱^-} f'(x)=-\infty$$

$$f(۱)=۵ \;،\; \lim_{x\to۱^+} f'(x)=+\infty$$

$$f\left(-\frac{۵}{۴}\right)=-۴$$

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۴}$		-۱		۱		$+\infty$
f'(x)		+	۰	−	$-\infty$	//////	$+\infty$	+	
f(x)	$-\infty$	↗	-۴	↘	-۵	//////	۵	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(5+\frac{3|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(5-3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2 \quad \text{و} \quad (x<0)$$

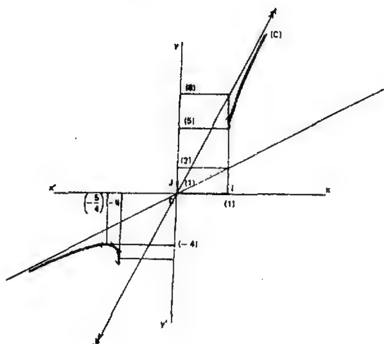
$$\lim (f(x)-2x)=\lim_{x\to-\infty}\left[3x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(5+3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=8 \quad \text{و} \quad (x>0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-8x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-3}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\right]=0$$

و خط های $y=2x$ و $y=8x$ مجانبهای مایلند.



مثال ۵- نمودار تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x)=\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۲-۳x^{۲}}$ و $x\in R$ را رسم کنید.

دامنه تعریف: $D_f=[-۲ \text{ و } ۲]$ و تابع روی $[-۲ \text{ و } ۲]$ معین و پیوسته و روی $]-۲ \text{ و } ۲[$ مشتق پذیر است .

جهت تغییرات: مشتق تابع

$$x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x)=\frac{\sqrt{۱۲-۳x^{۲}}-۳x}{۲\sqrt{۱۲-۳x^{۲}}}$$

جدول تغییرات:

$f(-۲)=-۱$ $\qquad \lim_{x\to -۲^{+}} f'(x)=+\infty$

$f(۲)=۱$ $\qquad \lim_{x\to ۲^{-}} f'(x)=-\infty$

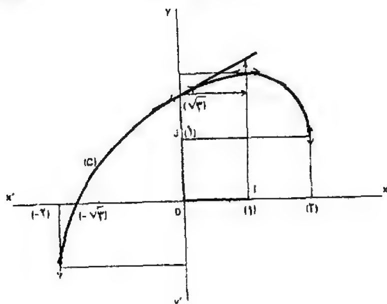
$f(۱)=۲$

$f(\circ)=\sqrt{۳}$ و $f'(\circ)=\frac{۱}{۲}$

$\forall x\in D$ و $\left(f(x)=\circ \Longleftrightarrow \frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۲-۳x^{۲}}=\circ\right)$

جواب $x=-\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

x	$-\infty$	-۲		۱		۲	$+\infty$
$f'(x)$		$+\infty$	$+$	$\circ$	$-$	$-\infty$	
$f(x)$		-۱	↗	۲	↘	۱	



شکل ۸

مثال ۶ـ نمودار تابع f با ضابطهٔ $x \xrightarrow{f} f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ را رسم کنید.

حل:

۱ـ دامنه تعریف : $D_f=R$ است و تابع روی فاصله $]-\infty , +\infty[$ معین و پیوسته و روی $]-\infty , 0[$ و $]0 , 1[$ و $]1 , +\infty[$ مشتق پذیر است.

۲ـ جهت تغییرات:

$$x \xrightarrow{f'} f'(x)=\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$$

در نقاط $x=0$ و $x=1$ تابع مشتق‌پذیر نیست زیرا:

$$\underset{x\to 0}{\text{حد}}\ |f'(x)|=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left|\frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}\right|=\underset{x\to 0}{\text{حد}}\left|\frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}}\right|=+\infty$$

$$\underset{x\to 1}{\text{حد}}\ f'(x)=\underset{x\to 1}{\text{حد}}\ \frac{3x^2-2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}=+\infty$$

و جهت تغییرات تابع بستگی به علامت $(3x^2-2x)$ دارد.

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +\infty$	$\Vert\ -\infty\ -$	$0\ +$	$+\infty\ \Vert\ +\infty$	$+$

۳ـ جدول تغییرات:

a) حد:

$$\underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\ f(x)=+\infty \qquad \underset{x\to -\infty}{\text{حد}}\ f(x)=-\infty$$

b) نقاط مهم:

$f(0)=0 \qquad f'(0)=\infty$

$f(1)=0 \qquad f'(1)=+\infty$

$f(\frac{2}{3})=-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

x	+ ∞		۰		$\frac{۲}{۳}$		۱		+ ∞
f'(x)		+ +∞ ‖ −∞		− ۰ +		+∞ ‖ +∞		+	
f(x)	− ∞	↗	۰	↘	$\frac{-\sqrt[۳]{۴}}{۳}$	↗	۰	↗	+ ∞

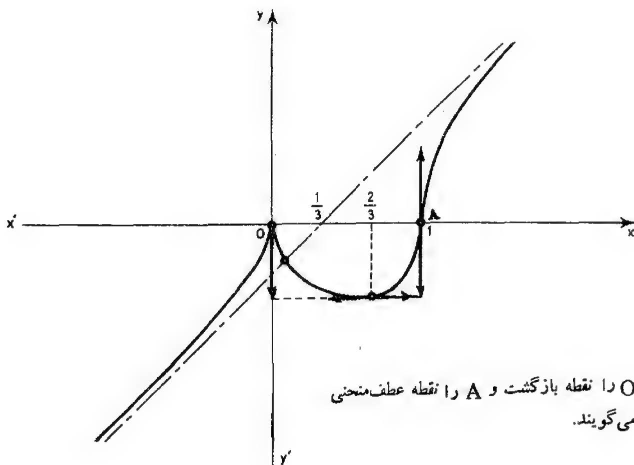
۴ــ مجانب:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{f(x)}{x} = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{\sqrt[۳]{x^۳ - x^۲}}{x} = ۱$$

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} (f(x) - x) = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} (\sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} - x) =$$

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{-x^۲}{\sqrt[۳]{(x^۳ - x^۲)^۲} + x\sqrt[۳]{x^۳ - x^۲} + x^۲)} = -\frac{۱}{۳}$$

خط D به معادله $y = x - \frac{۱}{۳}$ مجانب مایل تابع است.



O را نقطه بازگشت و A را نقطه عطف‌منحنی می‌گویند.

مثال ۷ـ نمودار هندسی تابع $x\xrightarrow{f}f(x)=\sqrt{(x-1)^{2}}+\frac{1}{x}$ را رسم کنید.

دامنه تعریف: $D_f=R-\{0\}$

جهت تغییرات: مشتق $x\xrightarrow{f'}f'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^{2}}}-\frac{1}{x^{2}}$

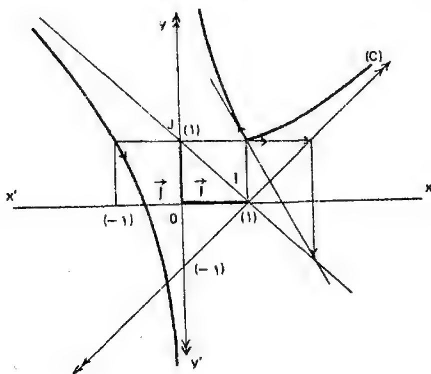
$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty\end{cases}$$

جدول تغییرات:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	-2 ‖ 0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

مجانبها : $y=-x+1$ و $y=x-1$ و $x=0$



مثال ۸ ـ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=2-\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

دامنه تعریف: برای اینکه تابع معین باشد باید $\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0$ یعنی $x\geqslant 2$ یا $x<-1$

و تابع در این فاصله معین وپیوسته و در فاصلهٔ $x>2$ و $x<-1$ مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع پس از ساده کردن.

و مشتق همواره منفی است.

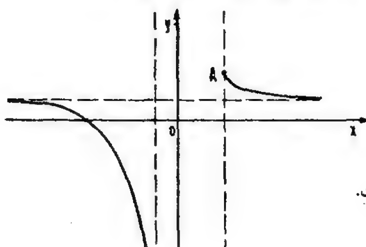
$$y'=\frac{-3}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}$$

جدول تغییرات:

$$\begin{cases}x\to -1\\ y\to -\infty\end{cases},\quad \begin{cases}x\to \pm\infty\\ y\to 1\end{cases},\quad \begin{cases}x=-4\\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$-$		$-\infty$	▨	▨	$-\infty$	$-$	
y	1	↘	0	↘ $-\infty$	▨	▨	2	↘	1

خط $x=-1$ مجانب قائم و خط $y=1$ مجانب افقی منحنی است.



منحنی در A برخط $x=2$ مماس است.

تمرین:

جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

۱) $y=\sqrt{x+2}$

۲) $y=\sqrt{-x+4}$

۳) $y=\sqrt{|1-x|}$

۴) $y=\sqrt{2-|x|}$

۵) $y=x-\sqrt{x}$

۶) $y=x+\sqrt{x}$

۷) $y=x-2\sqrt{x-1}$

۸) $y=\sqrt{-x^2-x+2}$

۹) $y=\sqrt{-2x^2+16x-30}$

۱۰) $y=1+\sqrt{-x^2+4x}$

۱۱) $y=1-\sqrt{-4x^2+9}$

۱۲) $y=x+\sqrt{2-x^2}$

۱۳) $y=2x-\sqrt{x^2-1}$

۱۴) $y=\sqrt{x^2-4x+9}$

۱۵) $y=\sqrt{x^2-4x-5}$

۱۶) $y=x-\sqrt{x^2-2x}$

۱۷) $y=x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$

۱۸) $y=\sqrt{x^2+2|x|}$

ب ـ جدول تغییرات هریك از دوتابع را كه باهم نوشته شده است تعیین و منحنی نمایش‌آنها را دریك دستگاه مختصات قائم رسم كنید:

۱۹) $y=x\pm\sqrt{x^2+1}$

۲۰) $y=x+\sqrt{-x^2+8}$

۲۱) $y=1+x^2\pm\sqrt{1-x^2}$

۲۲) $y=\pm(x+2)\sqrt{4-x^2}$

۲۳) $y=\pm 2x\sqrt{1-x}$

۲۴) $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$

۲۵) $y=\pm\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

۲۶) $y=\pm\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$

ج ـ جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم كنید.

۲۷) $y=2x\sqrt{1-x^2}$

۲۸) $y=(4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$

۲۹) $y=\sqrt{x}+\sqrt{4-2x}$

۳۰) $y=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

۳۱) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

۳۲) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$

۳۳) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

تابعهای مثلثاتی

۵-۴- تعریف - تابع مثلثاتی تابعی از متغیر حقیقی x است که در آن خطوط مثلثاتی قوس x یا خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{p}{q}x$ (p و q اعدادی درست‌اند و $q\neq 0$) بکار رفته باشد. مثل:

$$f(x)=\sin x+\cos x \quad \text{و} \quad f(x)=\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{2}$$

تعیین تغییرات ورسم توابع مثلثاتی متناوب

مثال۱- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y=2\sin^2x-5\sin x+2$ در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$

تابع همواره معین و اتصالی است. مشتق‌آن می‌شود:

$$y'=4\sin x\cos x-5\cos x=\cos x(4\sin x-5)$$

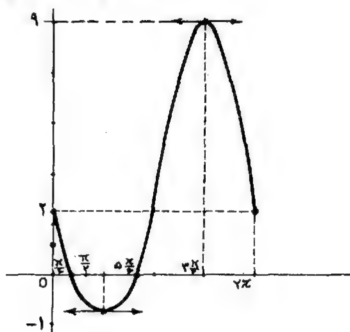
عامل $(4\sin x-5)$ همواره‌منفی است، بنابراین علامت مشتق مخالف علامت $\cos x$ می‌باشد.

ریشه‌های $\cos x=0$ عبارتست از: $\frac{\pi}{2}$ و $3\frac{\pi}{2}$

ریشه‌های قابل قبول $y=0$ عبارتست از ریشه‌هـای $\sin x=\frac{1}{2}$

$$y'=0:\begin{cases}x=\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=3\frac{\pi}{2}\\ y=-1 \text{ و } y=9\end{cases},\quad \begin{cases}x=0 \text{ یا } 2\pi\\ y=2\end{cases},\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6}\\ y=0\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'		$-$			0		$+$		0	$-$	
y	2	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	9	↘	2



مثال۲- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=\frac{۱-\sin x}{۲\sin x-۱}$ در فاصلهٔ $[-\pi , \pi]$

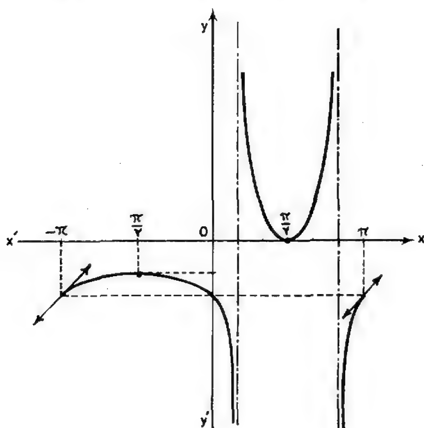
دورهٔ تناوب‌تابع ۲π است. تابع به‌ازای ریشه‌های $\sin x=\frac{۱}{۲}$ انفصالی‌است بنابراین: $x=\frac{\pi}{۶}$ و $x=\frac{۵\pi}{۶}$ مجانبهای قائم منحنی می‌باشند.

تابع دراین‌فاصله‌به‌ازای مقادیر $x\neq\frac{\pi}{۶}$ و $x\neq\frac{۵\pi}{۶}$ معین و پیوسته است:

$$y'=\frac{-\cos x}{(۲\sin x-۱)^۲} \quad ، \quad y'=۰ : \begin{cases} x=\frac{\pi}{۲} \text{ یا } x=-\frac{\pi}{۲} \\ y=۰ \text{ و } y=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pi \text{ یا } -\pi \\ y=-۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to\frac{\pi}{۶} \text{ یا } \frac{۵\pi}{۶} \\ y\to\pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x=۰ \\ y=-۱ \end{cases}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۶}$		π
y'		+	۰			−	‖	—	۰	+	‖	+	
y	−۱	↗	$-\frac{۲}{۳}$	↘	−۱	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۰	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	−۱



مثال ۳- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع $y=\frac{1+tgx}{tgx-\sqrt{3}}$ در فـاصله

$[\circ$ و $\pi]$

حل- دوره تناوب تابع $T=\pi$ است تابع را درفاصله $[\circ$ و $\pi]$ رسم می‌کنیم.
دامنه تعریف تابع:

$$D_f=[\circ \text{ و } \pi]-\{\cos x=\circ \text{ و } tgx-\sqrt{3}=\circ\}$$

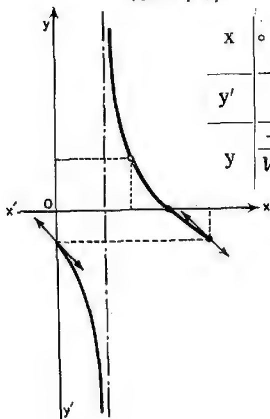
$$D_f=[\circ \text{ و } \pi]-\left\{\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{3}\right\}$$

تابع بازای $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ منفصل است .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1 \qquad \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}\\ y=\circ\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\ y=\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\infty \qquad \begin{cases}x=\circ\\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

$$y'=\frac{-(1+\sqrt{3})(1+tg^2x)}{(tgx-\sqrt{3})^2}<\circ$$



x	$\circ$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y′		−	‖	−	‖		−		
y	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1 ‖ 1	↘	$\circ$	↘	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$

مثال ۴: جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y=\sqrt{۳}\sin X+|\cos X|-۲$ را در فاصله $\left[-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲}\right]$ رسم کنید.

حل: درفاصله $\left[-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right]$ ، $\cos X\geqslant ۰$ بوده و $|\cos X|=\cos X$

درفاصله $\left[\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲}\right]$ ، $\cos X\leqslant ۰$ بوده و $|\cos X|=-\cos X$ می‌باشد.

در نتیجه

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۳}\sin X+\cos X-۲ & ، \ -\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\\ \sqrt{۳}\sin X-\cos X-۲ & ، \ \frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

الف: تابع‌در فاصله $\left]-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}\right[$ مشتق پذیر وپیوسته است و مشتق تابع عبارت‌است از:

$$y'=\sqrt{۳}\cos X-\sin X=۰$$

$$\sqrt{۳}\cos X-\sin X=۰ \ ، \ tgX=\sqrt{۳} \text{ و } X\neq\frac{\pi}{۲} \quad \begin{cases}X=\frac{\pi}{۳}\\ X=۰\end{cases}$$

بازاء $\begin{cases}X=۰\\ y=-۱\end{cases}$ و بازاء $\begin{cases}X=-\frac{\pi}{۲}\\ y=-\sqrt{۳}-۲\end{cases}$ $\begin{cases}X=\frac{\pi}{۲}\\ y=\sqrt{۳}-۲\end{cases}$

وریشه‌های $y=۰$ عبارتند از

$$\sqrt{۳}\sin X+\cos X-۲=۰ \ ، \ \sin\left(X+\frac{\pi}{۶}\right)=۱ \text{ و } X=\frac{\pi}{۳}$$

ب: تابع‌درفاصله $\left]\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲}\right[$ مشتق‌پذیر وپیوسته است و مشتق تابع عبارت است از:

$$y'=\sqrt{۳}\cos X+\sin X=۰$$

$$\sqrt{۳}\cos X+\sin X=۰ \quad tgX=-\sqrt{۳} \text{ و } X\neq\frac{\pi}{۲} \quad \begin{cases}X=\frac{۲\pi}{۳}\\ y=۰\end{cases}$$

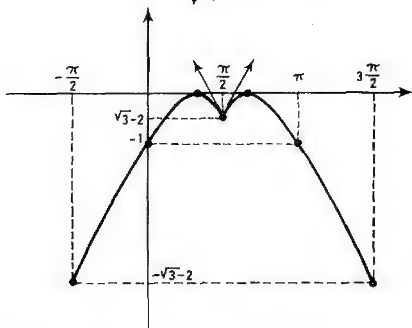
بازاء $\begin{cases}X=\frac{\pi}{۲}\\ y=\sqrt{۳}-۲\end{cases}$ و $\begin{cases}X=\pi\\ y=-۱\end{cases}$ و $\begin{cases}X=\frac{۳\pi}{۲}\\ y=-\sqrt{۳}-۲\end{cases}$

ریشه‌های $y' = ۰$ عبارتند از:

$$\sqrt{۳}\cos X - \sin X - ۲ = ۰ \ ، \ \sin(X - \frac{\pi}{۶}) = ۱ \ ، \ X = \frac{۲\pi}{۳}$$

جدول تغییرات:

x	$-\frac{\pi}{۳}$		۰	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$۳\frac{\pi}{۲}$
y'	$+۱$		$+$	$۰ \ -$	$-۱ \mid +۱$	$+$	۰	$-$	-۱
y	$-\sqrt{۳}-۲$	$\nearrow$	$-۱ \nearrow$	$۰ \searrow$	$\sqrt{۳}-۲$	$\nearrow$	$۰ \searrow$	$-۱ \searrow$	$-\sqrt{۳}-۲$



تذکر: تابع در فاصله $[-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}]$ پیوسته است ولی در نقطه $X = \frac{\pi}{۲}$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین

الف ــ دورهٔ تناوب هریك از تابعهای زیر را تعیین و منحنی نمایش هریك را در فاصلهٔ یکی از دوره‌های تناوب رسم کنید:

۱) $y = \sin x$

۲) $y = \cot g\, x$

۳) $y = ۲\sin\frac{x}{۳}$

۴) $y = ۴\sin\frac{\pi}{۳}x$

۵) $y = tg\,\pi x$

۶) $y = tg\,۲x + ۱$

۷) $y = ۲\cos(x - \frac{\pi}{۴})$ ۸) $y = \cos\pi x - ۲\sin\frac{\pi}{۲}x - ۱$

ب ـ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیردر یکی از فاصله‌های دورهٔ تناوب .

۹) $y = \frac{\cos x - ۱}{۲\cos x + ۱}$ ۱۰) $y = \frac{۲\sin x + ۱}{\sin x + ۲}$

۱۱) $y = \sec x + \operatorname{cosec} x$ ۱۲) $y = \frac{۱}{۱ + \cos ۲x} - tg x$

۱۳) $y = \cos x + |\sin x|$ ۱۴) $y = tg x + cotg x$

د ـ مطلوبست تعیین تغییرات تابع زیر درفاصله $[۰ , ۲\pi]$:

۱۵) $y = \cos x + \frac{۱}{۲}\cos ۲x$

ه ـ دریکی از فاصله‌های دورهٔ تناوب جدول تغییرات تابعهای زیررا تعیین ومنحنی نمایش هریك را رسم کنید .

۱۶) $y = \sin x + \frac{۱}{۲}\sin ۲x$ ۱۷) $y = \frac{\cos ۳x}{\sin ۲x}$

۱۸) $y = \frac{\cos x}{tg ۲x}$ ۱۹) $y = \frac{\sin x \cos x + ۱}{\sin x + \cos x}$

۲۰) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin ۲x}$ ۲۱) $y = \frac{۲\sin^۲ x - \sin x - ۱}{\sin x + ۱}$

۲۲) $y = \cos^۲ x + ۲\sin x \cos x - \sin^۲ x$ ۲۳) $y = \cos x(tg^۲ x - ۱)$

۲۴) $y = \sin ۳x \cdot \sin x$

۲۵ ـ تغییرات تابع $y = \frac{\sin \pi x}{\sin\frac{\pi x}{۲} - \cos\frac{\pi x}{۲}}$ را در فاصلهٔ $-۲ \leqslant x \leqslant ۲$ بررسی کنید.

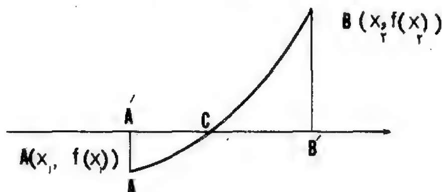
فصل ٦

تعیین تعداد ریشه‌ها وحل تقریبی معادلهٔ درجه سوم

۶-۱- مقدمه : هرچند ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $f(x)=0$ رابوسیلهٔ فرمولهایی بر حسب ضرایب معادله تعیین نموده‌اند ولی چون ریشه‌ها معمولا بصورت رادیکالهای مرکب با شماره‌های ریشگی ۲و۳ بدست آمده‌اند ، درمورد معادله‌هایی که ضرایبشان حرفی نبوده و اعداد حقیقی مشخص باشند می‌توان ریشه‌ها را بطور تقریبی به دست آورد .در زیر پس از ذکر دو نکته، راه بدست آوردن ریشه‌های تقریبی معادله بیان میشود

۶- ۲ - نکته ۱ - هر گاه تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[x_1 \text{ و } x_2]$ معین و پیوسته بوده و در یک جهت سیر کند (فقط صعودی یا فقط نزولی باشد) و $f(x_1)$ و $f(x_2)$ دارای علامتهای مختلف باشند، حتماً معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ مذکور یك ریشه دارد.

زیرا مطابق شکل مثلا اگر $f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ چون تابع در فاصلهٔ A وB صعودی است هر گاه نقطهٔ متغیر M به طول x روی منحنی از A به طرف B تغییر مکان دهد،



یعنی x آن زیاد شود y آن نیز مرتباً زیاد می‌شود وچون عرض آن ابتدا منفی وسپس در B مثبت شده‌است وتابع f پیوسته است ناچار درفاصلهٔ مذکور یك‌جا صفرخواهدشد ومعادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ یك ریشه دارد.

۶ - ۳ - نکته ۲- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $f(x)=0$

ابتدا مشتق تابع $y=f(x)$ را که یک سه‌جمله‌ای درجه دوم خواهد شد تعیین و مبین مشتق یعنی Δ راتعیین می کنیم؛

الف- هر گاه $\Delta \leqslant 0$ باشد مشتق همواره دارای یك علامت (مگر درریشهٔ مضاعف معادله

درحالت $\Delta=0$) و بالنتیجه تابع $y=f(x)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ (یا از $+\infty$ تا $-\infty$ برحسب آن که ضریب درجه سوم مثبت یا منفی باشد) در یك جهت سیر می‌کند ناچار معادله یك ریشه دارد.

ب: $\Delta>0$ دراین‌صورت‌مشتق دارای دوریشه و تابع دارای یك‌ماکزیمم‌ویك‌می‌نیموم‌است:
اگر ماکزیمم و می‌نیموم دارای یك علامت باشند، به سهولت از روی جدول تغییرات تابع معلوم می‌شود که $f(x)=0$ یك ریشه دارد.

اگر ماکزیمم و می‌نیموم دارای علامتهای مختلف باشند (به سهولت از روی جدول تغییرات‌دیده می‌شود) که معادلهٔ $f(x)=0$ داری سه ریشه است. اگر ماکزیمم یا می‌نیموم صفر باشد (از روی‌جدول تغییرات مشاهده می‌شود) معادله دارای دوریشه است یکی مضاعف (که خود به خود بدست آمده) ویکیْ ساده است.

برای اینکه مطلب روشن شود به مثالهای ذیل توجه نمائید.

مثال۱- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $x^3-12x+1=0$

تابع $y=x^3-12x+1$ را در نظر می‌گیریم

$$y'=3x^2-12 \Rightarrow 3x^2-12=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	17	↘	-15	↗	$+\infty$

با توجه به جدول بالا ونکتهٔ۱ ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق سه ریشه دارد به این شرح: $x_1<-2$ و $-2<x_2<2$ و $x_3>2$

مثال۲- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ: $x^3+3x^2+3x-4=0$

تابع $y=x^3+3x^2+3x-4$ را درنظر می‌گیریم:

تابع صعودی $y'=3x^2+6x+3$ ، $\Delta=0 \Rightarrow y'>0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-5	↗	$+\infty$

معادله‌یك ریشهٔ($x_1>-1$) دارد.

۶-۴- تعیین ریشه‌های تقریبی معادلهٔ درجهٔ سوم از راه تقریبهای متوالی- با توجه به دو نکته‌ای که در ابتدای این بخش ذکر کردیم ، فرض کنیم بدانیم معادله یك ریشه بین دو مقدار x_1 و x_2 دارد ، یعنی مثلاً $f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ و بخواهیم آن ریشه را با تقریب به‌خصوصی پیدا کنیم .

ابتدا به جای x عدد دلخواهی مانند x_0 که در فاصلهٔ $]x_1 , x_2[$ باشد قرار میدهیم ، اگر احیاناً $f(x_0)$ صفرشد که x_0 خود ریشهٔ معادله است . اما اگر $f(x_0)$ صفر نبود مثبت یا منفی می‌باشد . مثلاً اگر $f(x_0)<0$ معلوم می‌شود معادله یك ریشه بین x_0 , x_2 دارد زیرا $f(x_0)<0$ و $f(x_2)>0$. به همین‌ترتیب اعداد دیگری را امتحان می کنیم (ابتدا اعداد درست تاموقعی که ریشه بین دو عدد متوالی باشد ، سپس اعداد اعشاری) تا مثلاً به موردی برسیم که داشته باشیم : $f\left(\frac{a}{10}\right)<0$ و $f\left(\frac{a+1}{10}\right)>0$ یا بالعکس (a عددی درست است) در این صورت داریم $\frac{a}{10}<x<\frac{a+1}{10}$ و $\frac{a}{10}$ ریشهٔ تقریبی معادله تا $\frac{1}{10}$ تقریب نقصانی و $\frac{a+1}{10}$ مقدار تقریبی ریشه تا $\frac{1}{10}$ تقریب اضافی است .

حال اگر خواسته باشیم ریشهٔ معادله‌را تا $\frac{1}{100}$ تقریب تعیین‌کنیم چون :

$$\frac{10a}{100}<x<\frac{10(a+1)}{100}$$

می‌باشد ، در فاصلهٔ مذکور به x مقادیر مختلف می‌دهیم تا به موردی برسیم که مثلا داشته باشیم $f\left(\frac{a'}{100}\right)<0$ و $f\left(\frac{a'+1}{100}\right)>0$ (a' عددی درست است) دراین‌صورت داریم:

$$\frac{a'}{100}<x<\frac{a'+1}{100}$$

و $\frac{a'}{100}$ ریشهٔ تقریبی نقصانی معادله و $\frac{a'+1}{100}$ ریشهٔ تقریبی اضافی تا $\frac{1}{100}$ تقریب می‌باشد. به‌همین ترتیب با تقریبهای دیگر $\frac{1}{1000}$ و $\frac{1}{10000}$ ، ...، می‌توان به‌هر اندازه که‌خواسته باشیم به ریشه نزدیك شویم .

توجه : هر گاه معادله‌ای دارای یك ریشهٔ گویا باشد و آن را از این راه حل‌کنیم و مثلا ندانیم معادله ریشهٔ گویا $\frac{a}{10}$ یا $\frac{a'}{100}$ داشته باشد از راه فوق ریشهٔ معادله عیناً بدست خواهدآمد.

مثال ۱- حل معادلهٔ $x^3-3x-52=0$

تابع $y=x^3-3x-52$ را درنظر می گیریم. داریم: $y'=3x^2-3$

x	$-\infty$			-1		1		$+\infty$
y'		$+$		0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-50		$\searrow$	-54	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به‌جدول می‌بینیم که معادله فقط یک‌ریشهٔ $x>1$ دارد. حال عددی مثلا ۵ را انتخاب و $f(5)$ را حساب میکنیم :

$$f(1)=-54<0 \text{ و } f(5)=58>0 \Longrightarrow 1<x<5$$

حال مثلا $f(2)$ را محاسبه می‌کنیم خواهد شد. $f(2)=-50<0$ پس ریشهٔ معادلـه $2<x<5$ می‌باشد. برای $f(3)$ داریم:

$f(3)=-32<0$ پس خواهیم‌داشت: $3<x<5$. اکنون عدد ۴ را امتحان‌می‌کنیم، $f(4)=0$ پس ریشهٔ معادله عدد ۴ است.

مثال۲- تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x^3-3x-6=0$ تا ۰٫۱ تقریب نقصانی.

$$y=x^3-3x-6$$

$$y'=3x^2-3$$

x	$-\infty$			-1		1		$+\infty$
y'		$+$		0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-8		$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به‌جدول می‌بینیم معادله فقط یک‌ریشهٔ $x>1$ دارد.حال عددی مانند ۳ را کـه از ۱ بزرگتراست‌امتحان می کنیم، $f(3)=12>0$ پس معادله یک‌ریشه درفاصلهٔ $1<x<3$ دارد، زیرا $f(1)<0$.

حال عدد ۲ راامتحان می‌کنیم : $f(2)=-4<0$ پس $2<x<3$

عدد دلخواه ۲٫۴ راکه بین ۳ و ۲ است امتحان می‌کنیم:

$$f(2.4)=0.624>0 \Longrightarrow 2<x<2.4$$

عدد ۲٫۳ را امتحان می‌کنیم:

$$f(2.3)=-0.733 \Longrightarrow 2.3<x<2.4$$

بنابراین $x\simeq 2.3$ ریشهٔ معادله با ۰٫۱ تقریب نقصانی است.

۶ - ۵ - حالت کلی بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم - معادلـهٔ درجهٔ سوم

$$ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$$

را با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$ می‌توان به معادله‌ای به‌صورت زیردرآورد:

$$X^{3}+pX+q=0$$

بنابراین کافی است که در تعداد ریشه‌های معادله‌ای از نوع اخیر بحث کنیم.

برای بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^{3}+px+q=0 \qquad (1)$$

تغییرات تابع زیر را بررسی می‌کنیم:

$$y=x^{3}+px+q \qquad (2)$$

مشتق این تابع می‌شود:

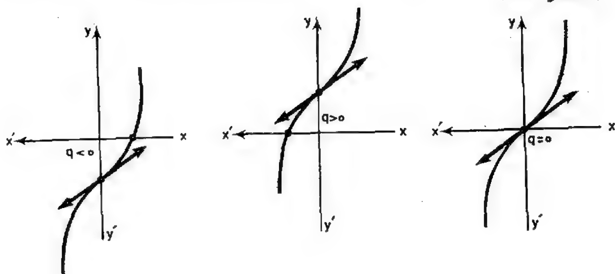
$$y'=3x^{2}+p \qquad (3)$$

هرگاه $p>0$ معادلهٔ $3x^{2}+p=0$ ریشه حقیقی ندارد و y' همواره مثبت است.

x	$+\infty$		0		$+\infty$
y'	+		+		+
y	$+\infty$	↗	q	↗	$+\infty$

همچنین هرگاه $p=0$ باشد، مشتق در ازای $x=0$ صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد و به ازای $x\neq 0$ همواره مثبت است. بنابراین در حالت $p\geqslant 0$ تابع (۲) همواره صعودی است ومنحنی نمایش تابع فقط دریك نقطه محور xها را قطع می‌کند. یعنی هرگاه $p\geqslant 0$ معادلهٔ (۱) فقط یك ریشه دارد.

اگر $q<0$ باشد آن ریشه مثبت واگر $q>0$ باشد آن ریشه منفی واگر $q=0$ باشد آن ریشه صفر است.



هرگاه $p<0$ مشتق درازای دومقدار x_1 و x_2 صفرشده وتغییرعلامت میدهد.

در این حالت تابع (۲) یك ماکسزیمم و یك می‌نیمم دارد. اگر M_1 و M_2 نقطه‌های نظیر ماکزیمم و می‌نیمم باشند باید معلوم کنیم که چه موقع این دو نقطه در یك طرف محور xها و چه موقع در دوطرف‌آن قرار دارند.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		+	0		−		0	+	
y	$-\infty$	↗	y_1	↘	q	↘	y_2	↗	$+\infty$

بافرض $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ ازمعادلهٔ $3x^2+p=0$ نتیجه می‌شود که:

$$x_1+x_2=0 \text{ و } x_1x_2=\frac{p}{3} \qquad (4)$$

و از معادلهٔ (۲) خواهیم داشت:

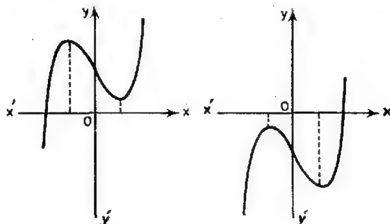
$$y_1y_2=(x_1^3+px_1+q)(x_2^3+px_2+q)$$
$$y_1y_2=(x_1x_2)^3+px_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+$$
$$q(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+pq(x_1+x_2)+p^2x_1x_2+q^2$$

با توجه به رابطه‌های (۴) داریم:

$$y_1y_2=\frac{p^3}{27}-\frac{2p^3}{9}+\frac{p^3}{3}+q^2=\frac{4p^3+27q^2}{27}$$

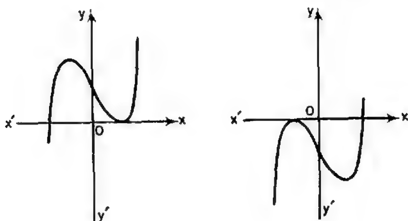
هرگاه $4p^3+27q^2>0$ در اینصورت $y_1y_2>0$ پس y_1 و y_2 همعلامتند و دونقطهٔ M_1 و M_2 در یك طرف محور $x'x$ واقعند. در این حالت منحنی تابع (۲) فقط در یك‌نقطه محور $x'x$ را قطع می‌کند و معادلهٔ (۱) فقط یك ریشه دارد.

اگر $q<0$ باشد آن ریشه مثبت و اگر $q>0$ باشد آن ریشه منفی است.



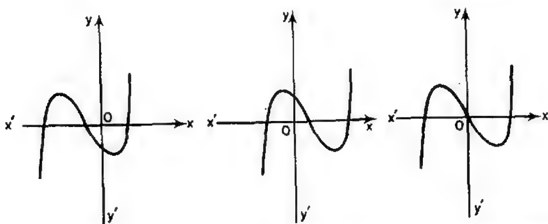
هر گاه $4p^3+27q^2=0$ در این صورت $y_1y_2=0$ و حداقل یکی از دو مقدار y_1 یا y_2 برابر صفر است . پس منحنی نمایش تابع در یك نقطه برمحور $x'x$ مماس و در یك نقطهٔ دیگر آن را قطع می‌کند . در این حالت معادلهٔ (۱) یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده دارد .

اگر $q>0$ ریشه ساده منفی وریشهٔمضاعف مثبت‌واگر $q<0$ ریشه ساده‌مثبت‌وریشهٔ مضاعف منفی و اگر $q=0$ هرسه ریشه صفر .



هر گاه $4p^3+27q^2<0$ در این‌صورت $y_1y_2<0$ و دونقطهٔ M_1 و M_2 در دوطرف محور $x'x$ واقعند و منحنی نمایش تابع (۲) با محور $x'x$ در سه نقطه متلاقی است . دراین حالت معادلهٔ (۱) سه ریشه دارد .

اگر $q>0$ دوریشه منفی یك‌ریشه مثبت،اگر $q<0$ دو ریشه مثبت‌یکی منفی، اگر $q=0$ یك ریشه صفر ودو ریشهٔ دیگر قرینه‌اند.



خلاصهٔ بحث ـ با توجه به اینکه اگر $p>0$ باشد $4p^3+27q^2$ نیز مثبت خواهدبود.
بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ به‌صورت‌زیر خلاصه می‌شود:

الف ـ اگر $4p^3+27q^2>0$ ، معادله فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد .

ب ـ اگر $۴p^۳+۲۷q^۲=۰$ ، به‌فرض $p\neq ۰$ معادله یك ریشهٔ حقیقی مضاعف و یك ریشهٔ حقیقی ساده دارد . وهرگاه $p=۰$ در این صورت $q=۰$ و معادله به‌صورت $x^۳=۰$ است.

ج ـ اگر $۴p^۳+۲۷q^۲<۰$ ، معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

تبصرهٔ ۱ـ از روی نمودار تابع (۲) در هریك از حالتهای سه‌گانهٔ بالا ، به سادگی می‌توان از روی علامت q علامت ریشه یا ریشه‌های معادله را نیز تعیین کرد.

مثال۱ـ بدون تشکیل جدول ورسم منحنی تعداد وعلامت ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+\frac{۱}{۳}=۰$ را معین کنید.

$$\Delta=۴p^۳+۲۷q^۲=۴(-۳)^۳+۲۷(\frac{۱}{۳})^۲=-۱۰۷<۰$$

معادله سه ریشه دارد

چون $q=\frac{۱}{۳}>۰$ است‌دو ریشه مثبت یکی‌منفی است

مثال ۲ـ بدون رسم منحنی تعدادوعلامت ریشه‌های معادله $x^۳-۳x^۲+x-۱=۰$ (۱) را تعیین کنید.

حل: با انتخاب مجهول معاون $x=X-\frac{b}{۳a}=X+۱$ معادله (۱) به صورت (۲) $X^۳-۲X-۲=۰$ در می‌آید.

$$\begin{cases}\Delta=۴p^۳+۲۷q^۲=۴(-۲)^۳+۲۷(-۲)^۲=۷۶>۰\\ x=-۲<۰\end{cases}$$

نتیجه میشود معادله (۲) دارای یك ریشه مثبت است وچون $x=X+۱$ می‌باشد معادله (۱) هم دارای یك ریشه مثبت خواهد بود.

تبصرهٔ ۲ـ بعضی‌از معادله‌های درجهٔ سوم را با تبدیلی غیراز $x=X-\frac{b}{۳a}$ نیزمی‌توان به‌صورت معادله‌ای‌از نوع (۱) درآورد . به مثال زیر توجه کنید.

مثال۳ـ بحث درتعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^۳-۳x^۲-m=۰$$

با فرض $x=\frac{۱}{X}$ داریم:

$$X^۳+\frac{۳}{m}X-\frac{۱}{m}=۰ \qquad ۴p^۳+۲۷q^۲=\frac{۴\times ۲۷}{m^۳}+\frac{۲۷}{m^۲}=\frac{۲۷(m+۴)}{m^۳}$$

بحث را به‌صورت جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

m	−∞	−۴		۰	+∞
$۴p^۳+۲۷q^۲$	+	۰	−		+
تعداد ریشه‌ها	یک ریشهٔ ساده	یک‌ریشهٔ ساده و یک ریشهٔ مضاعف	سه ریشه	یک‌ریشهٔ ساده و یک ریشهٔ مضاعف	یک ریشهٔ ساده

مثال ۴- در وجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه سوم زیر بازای مقادیر مختلف m بحث کنید $x^۳-۳x+(۱-m)=۰$ و سپس بکمک رسم منحنی درستی را بررسی بحث‌را کنید.

$$x^۳-۳x+(۱-m)=۰$$

$$۴p^۳+۲۷q^۲=۴(-۳)^۳+۲۷(۱-m)^۲=۲۷(m^۲-۲m-۳)=۰$$

$m=-۱$ و $m=۳$

$q=۱-m=۰ \qquad m=۱$

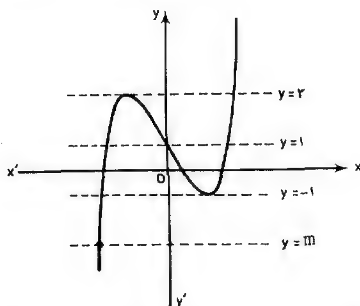
m	−∞	−۱		۱		۳	+∞
Δ	+	۰	−		−	۰	+
q	+		+	۰	−		−
نتیجه	یک ریشه منفی	مضاعف مثبت ساده منفی	دو ریشه مثبت یک‌ریشه منفی	یک ریشه صفر دو ریشه‌قرینه	دو ریشه منفی یک‌ریشه مثبت	مضاعف منفی ساده مبثت	یک‌ریشه مثبت

$m=x^۳-۳x+۱$

$y=x^۳-۳x+۱ \qquad y'=۳x^۲-۳=۰ \qquad x=\pm۱$

x	−∞		−۱		۰		۱		+∞
y'		+	۰		−		۰	+	
y	−∞	↗	۳	↘	۱	↘	−۱	↗	+∞

m	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
نتیجه		یک ریشه منفی	ریشه مضاعف مثبت ساده منفی	دو ریشه مثبت یک ریشه منفی	یک ریشه صفر دو ریشه دیگر قرینه	دو ریشه منفی یک ریشه مثبت	مضاعف منفی ساده مثبت	یک ریشه مثبت	



۶-۶ - روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم- هرگاه معادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

دارای ریشه‌های حقیقی x_1 و x_2 و x_3 باشد چند جمله‌ای ax^3+bx^2+cx+d بر $(x-x_1)$ و $(x-x_2)$ و $(x-x_3)$ بخش پذیر است وداریم:

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\equiv ax^3+bx^2+cx+d$$

باساده کردن طرف اول ومتحد کردن دو طرف خواهیم داشت:

$$a[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3]=$$
$$ax^3+bx^2+cx+d$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

مثال- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-5x+2=0$ عبارتنداز:

$x_1+x_2+x_3=0 \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-5$ و $x_1x_2x_3=-2$

نکته: در صورتیکه معادلهٔ $x^3+px+q=0$ دارای ریشه مضاعف باشد یعنی $4p^3+27q^2=0$ باشد.

ریشه‌مضاعف از فرمول:

$$x'=x''=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

وریشه ساده از فرمول:

$$x'''=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

محاسبه می‌شود.

تمرین

معلوم‌کنید هریك از معادله‌های زیر چندریشه دارد. سپس مقدار تقریبی ریشه‌های هر معادله را با ۰/۱ تقریب بدست‌آورید.

۱) $x^3+2x-5=0$

۲) $x^3-3x+1=0$

۳) $4x^3-6x^2+1=0$

۴ـ معادلهٔ $x^3-3a^2x^2-9a^4x-a^6=0$ مفروض است.

الفـ تحقیق کنید که این معادله به ازای جمیع مقادیر پارامتر a دارای سه‌ریشهٔ حقیقی است.

بـ روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را بنویسید و تحقیق کنید معادلهٔ فوق همواره دارای دو ریشهٔ منفی و یك ریشهٔ مثبت است.

۵ـ با استفاده از روابط بین ضرایب وریشه‌های یك معادلهٔ درجه سوم دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0 \\ x+by+b^2z+b^3=0 \\ x+cy+c^2z+c^3=0 \end{cases}$$

۶ـ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-3x^2+2m+2=0$ مفروض است.

الف ـ حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ فوق دارای سه یا دو یا یك ریشهٔ حقیقی باشد.

ب ـ به ازای $m=1$ و $m=-1$ ریشه‌های معادله را بدست آورید.

ج ـ پارامتر m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله دوبرابر قرینهٔ دیگری باشد.

$(x_2=-2x_1)$

۷ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3+(m-1)x^2-(2m+1)x-m=0$ باشد پارامتر m را طوری تعیین که رابطهٔ $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=9$ بین ریشه‌ها برقرار باشد.

۸ـ بازای مقادیر مختلف a درو جود وعلامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید.

$$x^2-3(a-1)x-2(a-1)=0$$

۹ـ بازای چه مقادیری از k خط D به معادله $y=k$ نمودار هندسی تابع با ضابطه $y=1-\frac{3x+2}{x^3}$ را در سه نقطه قطع می‌کند اگر α و β و γ طولهای نقاط تلاقی خط ومنحنی باشند k را چنان تعیین کنید که $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=12$ باشد.

۱۰ـ مطلوبست تعیین حدود m ضریب زاویه‌های خطوطی که از مبداء مختصات می‌گذرند و منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^3+3x+1}{x^2}$ را در سه نقطه متمایز قطع می‌کنند. درحالیکه خط بر منحنی مماس است مختصات نقطه تماس را بیابید.

۱۱ـ معادله $x^3+(p-1)x^2+qx-(p+q)=0$ مفروض استرابطه‌ای بین ریشه‌های این معادله بنویسید که به p و q بستگی نداشته باشد.

۱۲ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3-mx-2=0$ باشند معادله درجهٔ سوم دیگری بنویسید که ریشه‌های آن γ^3 و β^3 و α^3 باشند.

۱۳ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $2x^3+(m+n)x+m^2n^2=0$ باشند ثابت کنید $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$.

۱۴ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $2mx^3-3mx^2+1=0$ باشد m را چنان تعیین کنید که رابطه $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=6$ بین ریشه‌ها برقرار باشد.

فصل ۷

دیفرانسیل و انتگرال

دیفرانسیل

۷—۱—فرض کنید که تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ معین و در نقطهٔ x_0 از $]a,b[$ دارای مشتق باشد. اگر در نقطه x_0 به x نموی به اندازهٔ Δx بدهیم، y نموی به اندازهٔ Δy خواهد کرد. می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x = x - x_0$$
$$\Delta y = y - y_0 = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

چون f در نقطهٔ x_0 مشتق پذیر فرض شده است داریم:

$$(۱)\quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لذا وقتی Δx را کوچکتر و کوچکتر سازیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ به $f'(x_0)$ نزدیکتر و نزدیکتر می‌شود، و برای Δxهای کوچک می‌توان نوشت:

$$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

و یا

$$(۲)\quad \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

اگر تفاضل $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ را β بنامیم داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \beta$$

و

$$(۳)\quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \beta\Delta x$$

از روابط (۲) و (۳) دیده می‌شود که اگر Δy را که نمو تابع است برابر $f'(x_0)\Delta x$ اختیار کنیم خطائی به اندازهٔ $\beta\Delta x$ مرتکب خواهیم شد، و این خطا با کوچک شدن Δx کوچک خواهد شد. و به‌سمت‌صفر میل می‌کند.

رابطه (۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(۴)\quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

دربحث فوق اندیس ۰ را در x_0 برای بیان این منظور که x_0 درطول بحث ثابت است بکار بردیم. البته x_0 می‌تواند هر نقطه‌ای که تابع‌درآن مشتق پذیراست‌باشد. وقتی‌این استنباط ایجادشده دیگر لزومی به نوشتن اندیس ۰ نیست و می‌توان مطالب فوق را در هر نقطه x که تابع مشتق پذیراست نوشت.

توجه کنید که x و Δx به هم وابسته نیستند و برای هر x ثابت در D_f عدد Δx می‌تواند هر مقداری باشد که $x + \Delta x \in D_f$.

در این حالت رابطه‌های (۲) و (۴) به‌صورت‌های زیر درمی‌آید:

$$(۵)\quad \Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

واز روی آن می‌توان نوشت :

$$(۶)\quad f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

این مطالب دریکی از دومورد زیر به کار می‌آیند:

۱ـ معمولا محاسبه Δy کاری‌دشوار است ، درحالیکه محاسبهٔ $f'(x_0)\Delta x$ بادر دست‌داشتن x_0 و Δx کاری ساده‌تر است وبه‌کار بردن $f'(x_0)\Delta x$ بجای Δy حجم محاسبات را کم می‌کند.

۲ـ مقدار تابع ومقدار مشتق آن را در نقطه‌ای، مثلا x_0، می‌دانیم و میخواهیم در **نزدیکی و مجاورت x_0 مقادیر تابع را تخمین بزنیم.**

مثالهای زیراین مطالب را نشان می‌دهند :

مثال ۱ـ نمو تابع $f(x) = ۲\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}$ در نقطهٔ $x = ۳$ وقتی که x باندازهٔ ۰/۰۰۱ نمو می‌کند چقدر است؟

حل:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \qquad f'(x) = \frac{۴x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۲}}$$

$$f'(۳) = \frac{۱۲}{۳\sqrt[۳]{(۸ - ۱)^۲}} = ۱$$

$$\Delta y \approx \Delta x$$

چون $\Delta x = ۰/۰۰۱$ است $\Delta y \approx ۰/۰۰۱$ میشود.

مثال ۲ - فرض کنید که دستور تابع f را نمی‌شناسیم ولی به‌طریقی‌پی برده‌ایم (مثلا ازروی منحنی نمایش f) که مقدار تابع f در نقطهٔ $x_{\circ}=۲$ برابر ۱ - و مقدار مشتق آن در $x_{\circ}$ برابر ۳ است. می‌خواهیم مقادیر f را در نزدیکی $x_{\circ}$ حدس بزنیم.

حل : فرض کنید که x نقطه‌ای نزدیك به ۲ و به صورت $۲+\Delta x$ باشد . بنا به رابطهٔ (۶) داریم :

$$f(۲+\Delta x)\approx f(۲)+f'(۲)\Delta x$$

و یا

$$f(۲+\Delta x)\approx ۳\ \Delta x-۱$$

پس مثلا مقدار تابع در ۲/۰۱ و ۱/۹ بطور تقریبی چنین‌اند

$$f(۲/۰۱)\approx -۰/۹۷ \text{ و } f(۱/۹)\approx -۱/۳$$

مثال ۳ - مربعی فلزی به شماع ۱۰ متر را گرم کرده ایم و در اثر گرما اضلاع مربع به‌اندازه یك سانتیمتر بزرگ شده‌اند . مقدار تقریبی مساحت مربع را پس از گرم شدن حساب کنید .

حل : اگر $S(x)$ مساحت مربع به ضلع x باشد ، آنوقت $S(x)=x^{۲}$. دراین مسأله :

$$x_{\circ}=۱۰ \text{ و } \Delta x=۰/۰۱ \quad \text{و} \quad S'(x)=۲x \text{ و } S'(۱۰)=۲۰$$

اکنون بنا به رابطهٔ(۶) داریم:

$$S(۱۰+\Delta x)\approx S(۱۰)+S'(۱۰)\Delta x=۱۰۰+۰/۲=۱۰۰/۲$$

پس مساحت مربع تقریباً به اندازهٔ ۰/۲ متر مربع زیادشده است. مقدار واقعی اضافه مساحت $(۱۰/۰۱)^{۲}-۱۰۰=۰/۲۰۰۱$ است که تفاوت آن با آنچه تخمین زدیم ۰/۰۰۰۱ و در نتیجه عددی کوچك است.

مثال ۴ - فرض می کنیم $f(x)=\sin x$ باشد. پس خواهیم داشت $f'(x)=\cos x$ با درنظر گرفتن رابطهٔ تقریبی (۶) می‌توان چنین نوشت:

$$(a) \qquad \sin(x+\Delta x)\approx \sin x+\cos x\Delta x$$

حال اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\sin ۴۶^{\circ}$ را حساب‌کنیم اختیار می کنیم :

$$\Delta x=۱^{\circ}=\frac{\pi}{۱۸۰} \text{ و } x=۴۵^{\circ}=\frac{\pi}{۴}$$

داریم

$$۴۶^{\circ}=۴۵^{\circ}+۱^{\circ}=\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۸۰}$$

اینك با درنظر گرفتن این مقادیر رابطهٔ (a) چنین می‌شود:

$$\sin ۴۶^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۸۰}\right)=\sin\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۴}\times\frac{\pi}{۱۸۰}$$

و از آنجا :

$$\sin ۴۶^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\pi}{۱۸۰}=۰/۷۰۷۱+۰/۷۰۷۱\times۰/۰۱۷=۰/۷۱۹۴$$

نکته ــ اگر در فرمول (a) فرض شود $x=۰$ و $\Delta x=\alpha$ خواهیم داشت :

$$\sin\alpha\approx\alpha$$

یعنی اگر زاویه بسیار کوچك باشد اندازهٔ آن برحسب رادیان باسینوس آن زاویه تقریباً برابر است.

همچنین اگر $f(x)=tg\,x$ آنوقت $f'(x)=\frac{۱}{\cos^۲ x}$ و رابطهٔ (۶) چنین می‌شود :

$$tg(x+\Delta x)\approx tg\,x+\frac{۱}{\cos^۲ x}\times\Delta x$$

حال اگر $x=۰$ و $\Delta x=\alpha$ آنوقت $tg\alpha\approx\alpha$ شده و نتیجه می گیریم که اگر اندازهٔ زاویه‌ای بسیار کوچك باشد اندازهٔ آن برحسب رادیان با tg آن تقریباً برابر است.

در خطکش محاسبه زوایایی که اندازهٔ آنها کمتر از ۵ درجه و ۴۴ دقیقه است ، مقادیر سینوس و تانژانت آنها با اندازهٔ خود زاویه برحسب رادیان برابر گرفته می‌شود:

$$(\sin ۵^\circ\ ,\ ۴۴'=۰/۱)$$

مثال ۵ - اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد ، از (۶) نتیجه می‌شود :

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\times\Delta x$$

حال اگر جذر تقریبی ۱۰۵ را بخواهیم کافی است $x=۱۰۰$ و $\Delta x=۵$ اختیار گردد در این‌حال خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱۰۵}=۱۰+\frac{۱}{۲\sqrt{۱۰۰}}\times۵=۱۰+۰/۲۵=۱۰/۲۵$$

یا اگر جذر تقریبی ۹۸ را بخواهیم $x=۱۰۰$ و $\Delta x=-۲$ اختیار شده و خواهیم داشت:

$$\sqrt{۱۰۰-۲}=۱۰+\frac{۱}{۲\times۱۰}\times(-۲)=۱۰-۰/۱=۹/۹$$

حال مناسب است که تعریف زیر را بنمائیم :

تعریف : فرض کنید که $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد. مقدار

$$(۷)\qquad f'(x)\Delta x$$

را که درآن $x\in D_f$ و Δx عددی دلخواه و حقیقی است دیفرانسیل تابع f می‌نامند و با df یا dy نمایش می‌دهند.

اکنون تابع $y=f(x)=x$ را درنظر می گیریم . درمورد این تابع داریم

$f'(x)\equiv 1$ و لذا

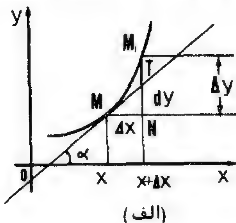
$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

در نتیجه $dx = \Delta x$، یعنی دیفرانسیل متغیر مستقل با نمو آن یکی است لذا رابطهٔ (۷) در مورد دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

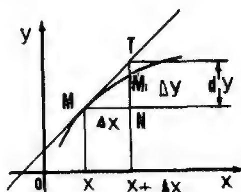
$$dy = f'(x)dx \qquad (8)$$

بنابراین: دیفرانسیل تابع برابر است با مشتق تابع ضربدر دیفرانسیل متغیر.

۷ـ۳ـ تعبیر هندسی دیفرانسیل ـ فرض می کنیم (C) منحنی نمایش تغییرات تابع مشتق پذیر $y=f(x)$ باشد. نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ را روی این منحنی اختیار کرده و مماس برمنحنی در این نقطه را رسم نموده و زاویهٔ این مماس با جهت مثبت محور xها را α می‌نامیم. چون فرض براین است که در این نقطهٔ M تابع دارای مشتق معینی است پس $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ متغیر مستقل را به اندازهٔ Δx تغییر می‌دهیم نقطهٔ نظیر $x+\Delta x$ روی منحنی نقطه M_1 می‌شود که عرضش $y+\Delta y$ است.



(الف)



(ب)

در مثلث MNT :

$$NT = MN \times tg\alpha$$

چون $tg\alpha = f'(x)$ و $MN = \Delta x$ است پس:

$$NT = f'(x) \cdot \Delta x$$

ولی طبق تعریف دیفرانسیل: $f'(x)\Delta x = dy$ می‌باشد، پس:

$$NT = dy$$

و از آنجا:

دیفرانسیل تابع $f(x)$ به ازای مقادیر مفروض x و Δx برابر است با نمو عرضی خط مماس در نقطه مفروض x برمنحنی $y=f(x)$

در شکل الف دیده می‌شود که: $M_1T = \Delta y - dy$

نباید تصور کرد که همواره Δy از dy بزرگتر است. به طوری که در شکل ب دیده می‌شود :

$\Delta y = M_1N$ و $dy = NT$ و $\Delta y < dy$

۷-۳- فرمولهای یافتن دیفرانسیل - با درنظر گرفتن رابطهٔ (۸) شماره ۷ — ۱ در زیر فرمولهای دیفرانسیل توابع مختلفی را که تاکنون دیده‌ایم یادآور می‌شویم :

۱) $d(c) = 0$

۲) $d(x) = dx$

۳) $d(u + v - w) = du + dv - dw$

۴) $d(cv) = c\,dv$ (c مقداری است ثابت)

۵) $d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$

۶) $d(u)^n = nu^{n-1}du$

۷) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

۸) $d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}du$ (c مقداری است ثابت)

۹) $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

۱۰) $d(\sqrt[n]{u}) = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۱۱) $d(\sin u) = \cos u\,du$

۱۲) $d(\cos u) = -\sin u\,du$

۱۳) $d(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u\,du$ $\left(\sec u = \frac{1}{\cos u}\right)$

۱۴) $d(\operatorname{cotg} u) = -\operatorname{cosec}^2 u\,du$ $\left(\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}\right)$

۱۵) $d(\sec u) = \sec u \operatorname{tg} u\,du$

۱۶) $d(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u\,du$

تمرین

دیفرانسیل توابع زیر را محاسبه کنید:

۱) $y=3x^2-8x+9$

۲) $y=\frac{3x^2-7x-3}{2x^2+9x+2}$

۳) $y=(2x^3+8x^2-9x+8)^7$

۴) $y=2x\sqrt{1-x^2}$

۵) $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

۶) $y=x+\sqrt{1+x^2}$

۷) $y=\sin^3 2x$

۸– تغییر حجم یك استوانه به‌ارتفاع h و به شعاع r را، وقتی که r به‌اندازهٔ dr تغییر کند، بدست آورید. مثال‌عددی $h=20$ و $r=5$ و $dr=0/1$ سانتی‌متر.

۹– دورهٔ تناوب یك آونگ ساده به وسیلهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ بدست می‌آید. فرض می‌کنیم $l=1m$ $g=9/8m/s^2$ باشد.

تغییر T را وقتی که l به‌اندازهٔ $0/01$ متر تغییر کند بدست آورید.

۱۰– فرض‌می‌کنیم‌شدت‌جریان برق‌بوسیله‌فرمول $I=\frac{V}{R}$ و $V=220$ ولت‌و $R=50$ اهم بدست می‌آید. تغییر I را درهریك ازحالات زیر بدست آورید.

اولا: V باندازه ۵ ولت تغییر کند.

ثانیاً: R باندازه $0/1$ اهم تغییر کند.

۱۱– جذر تقریبی $\sqrt{630}$ و $\sqrt{620}$ و $\sqrt{730}$ را بیابید (با استفاده از دیفرانسیل).

۱۲– به کمك دیفرانسیل مقدار تقریبی $tg46°$ و $cos46°$ و $sin76°$ و $tg23°$ را بیابید.

درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۱۳) $d\left[(21x^2-24x+32)\sqrt[4]{(x+1)^3}\right]=\frac{231x^2dx}{4\sqrt[4]{x+1}}$

$$۱۴)\quad d[\sin x\cos x(۲\cos^۲ x+۳)+۳x]=۸\cos^۴ x dx$$

۱۵ـ نخست ثابت کنید که $d(\text{Arc}tg x)=\frac{dx}{۱+x^۲}$ سپس درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$d[x\text{Arc}tg x]=\text{Arc}tg x dx+\frac{x}{۱+x^۲}dx$$

$$d(۲x^۳\text{Arc}tg x-x^۲]=۶x^۲\text{Arc}tg x dx-\frac{۲x}{۱+x^۲}dx$$

۱۶ـ نخست ثابت کنید $d(\text{Arc}\sin u)=\frac{du}{\sqrt{۱-u^۲}}$ سپس درستی روابط زیـر را ثابت کنید:

الف $d(\text{Arc}\sin ۲x\sqrt{۱-x^۲})=d(۲\text{Arc}\sin x)$

ب $d\left(\text{Arc}tg\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}\right)=d\left(\text{Arc}\cos x\right)$

ج $d\left(\frac{x}{۱+x^۲}+\text{Arc}tg x\right)=\frac{۲dx}{(۱+x^۲)^۲}$

انتگرال نامعین

۷ـ ۴ـ پیشگفتار ـ درگفتارهای پیشین با مسایلی ازاین قبیل روبرو بودیم:

الف ـ تابعی مانند $F(x)$ مفروض است، مشتق این تابع یعنی $f(x)=F'(x)$ را بیابید.

ب ـ معادلـه یك منحنی $y=F(x)$ است. معادلهٔ ضریب زاویه‌ایهـای مماسهای این منحنی یعنی:

$$\frac{dy}{dx}=F'(x)=f(x)$$

را بیابید. دراین گفتار با مسئلهٔ وارون این اعمال روبرو هستیم. یعنی در این مبحث معادله ضریب زاویه‌ایهای مماسهای برمنحنی را می‌دهند و معادلهٔ منحنی را می‌خواهند. یا، مشتق یك تابع را می‌دهند وخود تابع را طلب می کنند.

۷-۵- تعریف تابع اولیه - تابع $F(x)$ را یك تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ در فاصلهٔ I گویند هرگاه درجمیع نقاط I رابطهٔ $F'(x)=f(x)$ برقرار باشد.

مثال ۱- تابع $F(x)=x^4$ تابع اولیهٔ $f(x)=4x^3$ است زیرا:

$$\frac{d(x^4)}{dx}=4x^3$$

مثال ۲- تابع $F(x)=\cos x$ تابع اولیهٔ $f(x)=-\sin x$ است زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

مثال ۳ - تابع $f(x)=3x^2+4x$ معادلهٔ ضریب زاویه‌ای‌های مماسهای برمنحنی نمایش تابع $F(x)=x^3+2x^2$ می‌باشد، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(x^3+2x^2)=3x^2+4x$$

به آسانی دیده می‌شود که اگر $f(x)$ یك تابع اولیه داشته باشد، آنگاه تابع اولیه‌های زیادی دارد. مثلاً در مثال ۱ توابع $F(x)=x^4+1$ و $F(x)=x^4-1$ و $F(x)=x^4+5$ و به‌طور کلی $F(x)=x^4+c$ همگی تابع‌اولیه‌های مختلف $f(x)=4x^3$ می باشند، واختلاف آنها درعددی ثابت‌می‌باشد. یعنی اگر $f(x)$و$\Phi(x)$ دوتابع‌اولیه‌ی $f(x)$ باشند، $F(x)-\Phi(x)=c$ می‌باشد.

زیرا طبق تعریف:

$$F'(x)=f(x) \quad و \quad \Phi'(x)=f(x)$$

و از آنجا:

$$f'(x)-\Phi(x)\equiv 0$$

اما ثابت می‌کنندکه: هرگاه مشتق تابعی روی یك فاصله متحد صفرباشد، آنگاه آن تابع روی آن فاصله ثابت است.

پس باید $F(x)-\Phi(x)$ برابر مقدار ثابتی باشد تا مشتق آن یعنی $F'(x)-\Phi'(x)$ متحد صفر گردد.

مسأله یافتن تابعی که مشتق‌آن $f(x)$ باشد ومسأله یافتن تابعی که دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد هردو یکی هستند وجوابهای آنها مانند هم است. ازاین روی میتوان عمل تابع اولیه گرفتن را عکس عمل دیفرانسیل‌گیری نیز دانست. برای مشتق و دیفرانسیل تابع f بـه ترتیب نمادهای $f'(x)$ و $f'(x)dx$ را به کاربرده‌ایم؛ ونمادی‌که برای عکس این اعمال به‌کار برده می‌شود $\int f(x)dx$ می‌باشدکه «انتگرال $f(x)dx$» یا بطور مختصر «انتگرال f» خوانده می‌شود و آن هریك ازتوابع اولیه f است. این نماد انتگرال نامعین نیز نامیده می‌شود (واژه نامعین درمقابل واژه معین درمورد انتگرال بکار برده می‌شود، که بعداً تقریباً باآن‌آشنا خواهید شد.)طبق‌تعریف نماد $\int f(x)dx$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

و

$$dy=f'(x)dx$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int dy=\int f'(x)dx$$

$$y=f(x)+C$$

واگر F یک تابع اولیهٔ f باشد آنوقت

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

هدف ما دراین بخش یافتن انتگرال برخی از توابعی است که دراین کتاب خوانده‌ایم. البته لازم به تذکر است که انتگرال (یا تابع اولیهٔ) هرتابعی را نمی‌توان به دست آورد.

نخستین فرمولی که درباره انتگرالگیری توابع ارائه می‌دهیم عبارت است از:

$m\neq -1$ عددی است گویا

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$$

برای اثبات درستی فرمول بالا کافی است از $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ دیفرانسیل بگیریم وببینیم که برابر $x^m dx$ می‌شود.

مثال۱- تعیین تابع اولیه $f(x)=x^5$.

طبق فرمول خواهیم‌داشت

$$\int x^5 dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+c=\frac{1}{6}x^6+c$$

مثال۲- تابع اولیهٔ $y=\sqrt[5]{x^3}$ می‌شود:

$$\int \sqrt[5]{x^3}dx \quad \int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{1+\frac{3}{5}}}{1+\frac{3}{5}}+c=\frac{x^{1+\frac{3}{5}}}{\frac{8}{5}}+c=\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+c$$

مثال۳- تابع اولیهٔ $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ می‌شود:

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int x^{\frac{-3}{5}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+c=\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+c=\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+c$$

مثال۴- تعیین تابع اولیهٔ $f(x)=\frac{1}{x^5}$

$$\int\frac{1}{x^5}dx=\int x^{-5}dx=\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+c=\frac{x^{-4}}{-4}+c=\frac{-1}{4x^4}+c$$

مثال ۵- محاسبهٔ انتگرال $f(x)=\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}$

$$\int\frac{x^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}\,dx=\int x^2\times x^{\frac{2}{3}}\times x^{-\frac{3}{5}}dx$$

$$=\int x^{\frac{46}{15}}dx=\frac{x^{\frac{46}{15}+1}}{\frac{46}{15}+1}+c=\frac{15}{61}x^{4+\frac{1}{15}}+c=\frac{15}{61}x^4\sqrt[15]{x}+c$$

تمرین

تابع اولیهٔ توابع زیر را نسبت به x بیابید.

۱) $f(x)=x$ ۲) $f(x)=x^2+3x$

۳) $f(x)=\frac{1}{x^8}$ ۴) $f(x)=\sqrt[9]{x^4}$

۵) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{x^4}}$ ۶) $f(x)=\frac{x^4\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$

از تساویهای زیر y را محاسبه کنید:

۷) $\frac{dy}{dx}=2ax^2$ ۸) $\frac{dy}{dx}=2x^3$

۹) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-4x+4}{x^2}$ ۱۰) $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x^2)(1-2x^2)}{x^2}$

۱۱- ضریب زاویه‌ای خطی که از نقاط $A(-4,5)$ و $B(2,6)$ می‌گذرد چقدراست؟ معادلهٔ این خط را بااستفاده از انتگرال بیابید.

۱۲- یك منحنی از نقطهٔ $A(2,0)$ می‌گذرد و معادلهٔ ضریب زاویه‌ای آن $3x^2-\frac{1}{x^2}$

است. معادلهٔ منحنی را بیابید.

۷-۶- چند فرمول دیگر برای انتگرال‌گیری

۱- انتگرال‌مجموع یا تفاضل چند جملهٔجبری برابر است با مجموع یا تفاضل‌انتگرالهای یکایک‌آن جمله‌ها یعنی:

$$(۱)\quad \int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw$$

در رابطهٔ بالا u و v و w تابعهایی از متغیر مستقل مانند x می‌باشند

۲- a عددی است ثابت $\quad \int a\,dv=a\int dv \quad (۲)$

۳- n عددی است گویا $n+1\neq 0$ و

$$(۳)\quad \int u^{n}du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

اینك طی‌چند مثال زیر طرز یافتن‌انتگرال برخی از تابعها را به‌کمك دستورهای بالانشان می‌دهیم:

مثال ۱ - محاسبهٔ :

$$\int 24(3x+4)^{7}dx$$

فرض‌می‌کنیم $3x+4=u$ ازآنجا خواهیم داشت:

$$3dx=du \Longrightarrow dx=\frac{1}{3}du$$

در نتیجه:

$$\int 24(3x+4)^{7}dx=\int 24u^{7}\times\frac{1}{3}du$$

$$=\frac{1}{3}24\int u^{7}\times du=8\,\frac{u^{7+1}}{7+1}+c=u^{8}+c$$

باقرار دادن مقدار u خواهیم داشت:

$$\int 24(3x+4)^{7}=(3x+4)^{8}+c$$

مثال ۲ - محاسبهٔ :

$$\int\frac{24dx}{(-3x+6)^{9}}$$

فرض می کنیم $-3x+6=u$ از آنجا خواهیم‌داشت:

$$-3dx=du \quad dx=-\frac{1}{3}du$$

$$\int \frac{24dx}{(-3x+6)^9} = \int \frac{24\left(-\frac{1}{3}du\right)}{u^9} = \int \frac{-8du}{u^9}$$

$$= -8\int u^{-9}du = -8 \times \frac{u^{-9+1}}{-9+1} + c = u^{-8} + c = \frac{1}{u^8} + c$$

واز آنجا:

$$\int \frac{24dx}{(-3x+6)^9} = \frac{1}{(-3x+6)^8} + c$$

مثال ۳ - محاسبهٔ :

$$\int \frac{14dx}{5\sqrt[5]{(7x-2)^3}}$$

فرض می‌کنیم $7x-2=u$ از آنجا:

$$7dx = du \implies dx = \frac{1}{7}du$$

$$\int \frac{14dx}{5\sqrt[5]{(7x-2)^2}} = \int \frac{14 \times \frac{1}{7}du}{5\sqrt[5]{u^2}} = \int \frac{2}{5}u^{\frac{-2}{5}}du$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{u^{-\frac{2}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1} + c = \frac{2}{5} \times \frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = \sqrt[5]{u^2} + c$$

سرانجام :

$$\int \frac{14dx}{5\sqrt[5]{(7x-2)^3}} = \sqrt[5]{(7x-2)^2} + c$$

مثال ۴- محاسبه :

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{x^2+6x+7} = u$ از آنجا :

$$x^2+6x+7 = u^2 \implies (2x+6)dx = 2udu$$

$$(x+3)dx = udu$$

$$\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x+7}} = \int \frac{udu}{u} = \int du = u + c$$

سرانجام :

$$\int\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}=\sqrt{x^2+6x+7}+c$$

مثال ۵ - محاسبهٔ :

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{1-x}=u$ از آنجا خواهیم داشت :

$$1-x=u^2 \Rightarrow x=1-u^2 \Rightarrow dx=-2udu$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}=\int\frac{(1-u^2)^2(-2udu)}{u}$$

$$=\int(-2+4u^2-2u^4)du=-2u+\frac{4}{3}u^3-\frac{2}{5}u^5+c$$

$$=-u(2-\frac{4}{3}u^2+\frac{2}{5}u^4)+c$$

$$=-u\times\frac{30-20u^2+6u^4}{15}+c$$

$$=-\frac{2}{15}u(15-10u^2+3u^4)+c$$

سرانجام :

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x}}=-\frac{2}{5}\sqrt{1-x}[15-10(1-x)+3(1-x)^2]+c$$

$$=-\frac{2}{5}\sqrt{1-x}\ (8+4x+3x^2)+c$$

مثال ۶ - محاسبهٔ :

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}dx$$

فرض می‌کنیم $u=x-2$ از آنجا خواهیم داشت :

$$x=u+2 \Rightarrow dx=du$$

$$x^3-2x^2+x+5=(u+2)^3-2(u+2)^2+(u+2)+5=$$
$$u^3+6u^2+12u+8-2u^2-8u-8+u+2+5=$$

$$u^3+4u^2+5u+7$$

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}dx=\int(u^3+4u^2+5u+7)u^{100}du$$
$$=\int u^{103}du+4\int u^{102}du+5\int u^{101}du+7\int u^{100}du$$
$$=\frac{u^{104}}{104}+4\frac{u^{103}}{103}+5\frac{u^{102}}{102}+7\frac{u^{101}}{101}+c$$

سرانجام:

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}=\frac{1}{104}(x-2)^{104}+\frac{4}{103}(x-2)^{103}$$
$$+\frac{5}{102}(x-2)^{102}+\frac{7}{101}(x-2)^{101}+c$$

تمرین

انتگرالهای زیررا حساب کنید :

۱) $\int(-9x+8)^6dx$

۲) $\int\frac{dx}{(-9x+8)^6}$

۳) $\int\sqrt{(4x-3)^3}\,dx$

۴) $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{(-3x+1)^5}}$

۵) $\int(4x^3+8x)\sqrt{x^4+4x^2}\,dx$

۶) $\int\frac{(-12x+16)dx}{\sqrt[7]{(-3x^2+8x+9)^5}}$

۷) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2-x}}$

درستی روابط زیررا ثابت کنید :

۸) $\int\sqrt[7]{x^3}\,dx=\frac{7}{10}x\sqrt[7]{x^3}+c$

۹) $\int x^9\sqrt[7]{x^2}\,dx=\frac{7}{72}x^{10}\sqrt[7]{x^2}+c$

۱۰) $\int \frac{dx}{\sqrt[7]{(3x-1)^5}} = \frac{7}{6}\sqrt[7]{(3x-1)^2} + c$

۱۱) $\int \frac{(2x+5)dx}{(x-2)^7} = \frac{-3}{5(x-2)^5} - \frac{11}{6(x-2)^6} + c$

۱۲) $\int (-2x+1)\sqrt[9]{(-x^2+x)^5}dx =$

$$\frac{9}{14}(-x^2+x)\sqrt[9]{(-x^2+x)^5} + c$$

۱۳) $\int (3x+1)(x-2)^{50}dx = \frac{3}{52}(x-2)^{52} + \frac{7}{51}(x-2)^{51} + c$

۱۴) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + c$

۱۵) $\int \frac{x^2dx}{(x^3-1)^5} = \frac{-1}{12(x^3-1)^4} + c$

۱۶) $\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + c$

۱۷) $\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+3x}} = \frac{2\sqrt{x^3+3x}}{3} + c$

۱۸) $\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}dx = \frac{2(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3nb} + c$

۱۹) $\int \frac{t^2dt}{(a+bt^3)^3} = -\frac{1}{6b(a+bt^3)^2} + c$

۲۰) $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{1+x} + c$

۷-۷- مقدار ثابت انتگرال-در پیشگفتار ایـن مبحث ، دیدیـم که یك تابع دارای بینهایت انتگرال یا تابع اولیه است که اختلاف آنها در عدد ثابت انتگرالگیری می‌باشد و به‌همین‌جهت نوشتیم :

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

این مقدار ثابت یعنی c بادردست‌داشتن برخی اطلاعات در مورد تابع قابل محاسبه است . به

مثال زیر توجه کنید:

مثال- مشتق تابعی برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3+21x^2-18x+8$$

مطلوب است یافتن این تابع درصورتی که بدانیم مقدار این تابع بهازای $x=1$ برابر صفر است.

حل- چون:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3+21x^2-18x+8$$

از آنجا:

$$dy=(12x^3+21x^2-18x+8)dx$$

درنتیجه:

$$y=\int(12x^3+21x^2-18x+8)dx$$

پس:

$$y=3x^4+7x^3-9x^2+8x+c$$

طبق صورت مسئله بهازای $x=1$ خواهیم داشت $y=0$ در نتیجه:

$$0=3+7-9+8+c \Longrightarrow c=-9$$

سرانجام:

$$\boxed{y=3x^4+7x^3-9x^2+8x-9}$$

۷-۸- تعبیر هندسی عدد ثابت انتگرال- این تعبیر را با ذکر مثال زیر تفسیر می‌کنیم.

مثال — مطلوب‌است تابعی که درهر نقطهٔ منحنی نمایش آن معادلهٔ ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی $2x$ باشد.

حل- چون $\frac{dy}{dx}=2x$، پس:

$$dy=2xdx$$

و از آنجا:

$$y=\int 2xdx=x^2+c$$

حال اگر به‌جای c اعداد مختلف مانند ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- قرار دهیم خواهیم داشت:

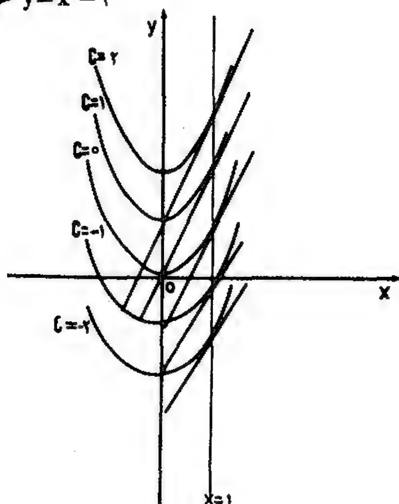
$$c=2 \quad \Longrightarrow \quad y=x^2+2$$

$$c=1 \quad \Longrightarrow \quad y=x^2+1$$

$c=0 \Rightarrow y=x^2$

$c=-1 \Rightarrow y=x^2-1$

$c=-2 \Rightarrow y=x^2-2$



این توابع مختلف متعلق به یکخانواده از سهمی ها هستندکه محور yها را به ترتیب درنقاطی به عرض ۲ و ۱و۰ و ۱ — و ۲ — قطـع می‌کنند و به‌ازای یك مقدار ثابت بـرای x ضریب زاویه‌ایهای مماس همگی‌آنها ثابت است. مثلا به‌ازای ۱ = x ضریب زاویهٔ مماس تمامی آنها ۲ است. اگر در این مثال‌اطلاعات دیگری‌داشته باشیم می‌توانیم عدد ثابت و تابع مربوطه را حساب کنیم . مثلاً اگر بدانیم به ازای ۱ = x، مقدار y عدد ۳ است به دست می‌آوریم :

$3=1+c \Rightarrow c=2$ ودر نتیجه $y=x^2+2$:

تمرین

هریك از عبارتهای زیر دیفرانسیل تابعی می‌باشند . ایـن تابعها را با اطلاعات داده شده بیابید .

دیفرانسیل	مقدار متغیر	مقدار y نظیر
۱) $(۲x-۴)dx$	۲	۵
۲) $(۲ax+b)dx$	۰	c
۳) $(\sqrt{t}+\frac{۱}{\sqrt{t}})dt$	۴	۰
۴) $(\sqrt{۳s+۱})ds$	۵	۸
۵) $(-۴x^{۳}+۸x-۳)dx$	۱	۰

(۶) ــ مشتق تابعی در نقطهٔ (x,y) برابر $\frac{x+۱}{y+۱}$ است. در صورتی که به ازای $x=۰$ مقدار این تابع ۱ باشد ، این تابع را بیابید.

جواب : $(y+۱)^{۲}=(x+۱)^{۲}+۳$

(۷) ــ مشتق تابعی در نقطهٔ (x,y) برابر $\frac{۴-x}{۲y-۳}$ است درصورتی که به ازای $x=۱$ مقدار این تابع برابر ۲ باشد این تابع را بیابید .

جواب : $۲(x-۴)^{۲}+(۲y-۳)^{۲}=۱۹$

(۸) ــ درصورتی که $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$ باشد مقدار y را بیابید ، درصورتی که بدانیم به‌ازای $x=۳$ خواهیم داشت $y=۴$

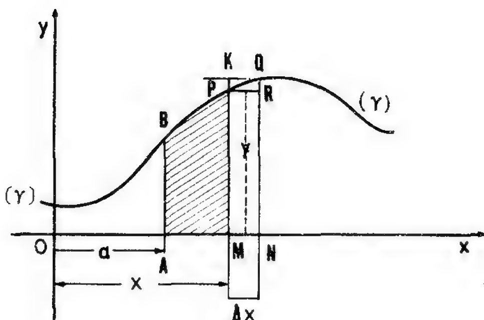
جواب : $x^{۲}+y^{۲}=۲۵$

(۹) ــ مشتق‌تابعی $\sqrt{۳x}-x^{۴}$ است . مطلوب است این تابع در صورتی که به ازای $x=۳$ داشته باشیم $y=۲$

(۱۰) ــ مشتق‌تابعی $\frac{۳x+۴}{\sqrt{۲x+۱}}$ است . مطلوب است این تابع در صورتی که به ازای $x=۴$ داشته‌باشیم $y=۱$

انتگرال معین

تاکنون هرچه انتگرال دیده‌ایم ، اصطلاحاً «انتگرال‌نامعین» نامیده می‌شوند . اینك از انتگرالهایی گفتگو خواهیم کرد که آنها را «انتگرال معین» خواهیم نامید . دلیل این نامگذاری را درپایان‌این گفتار خواهیدیافت.انتگرال معین مفهومی‌است اساسی درریاضی وفیزیك‌ومکانیك‌و سایر رشته‌های علوم.



۷ــ۹ــ سطح زیر منحنی ــ فرض می‌کنیم منحنی (γ)نمایش هندسی تابع پیوسته و غیر منفی $y=f(x)$ در فاصله‌ای باشد. فرض کنید که AB عرض نقطهٔ ثابتی ازاین منحنی درنقطه‌ای به‌طول a وPM عرض متغیری از نقطهٔ متغیر P واقع برمنحنی باشد، سطح محصور بین خطوط AB و AM و MP وقوس $\widehat{BP}$ از منحنی را S می‌نامیم. حال اگر x نمو کوچکی مانند Δx اختیار کند، ΔS، یعنی نمو سطح، سطح محصور بین خطوط PM و MN و NQ و قوس $\widehat{PQ}$ ازمنحنی است. طبق شکل بالا می‌توان چنین نوشت:

$$\text{سطح } MNRP < \text{سطح } MNPQ < \text{سطح } MNQK$$

و ازآنجا:

$$(1)\ MP\times\Delta x<\Delta S<NQ\times\Delta x$$

(**توجه** : دراین شکل MP و NQ به ترتیب عرضهای می‌نیمم و ماکزیمم مطلق‌تابع f روی فاصلهٔ $[x,x+\Delta x]$ می‌باشند . درحالت کلی برای آن که رابطه‌ای نظیر (۱) برقرار باشد باید مستطیل داخلی را به ارتفاع می‌نیمم مطلق تابع روی $[x,x+\Delta x]$ و مستطیل بیرونی را به ارتفاع ماکزیمم مطلق‌تابع روی $[x,x+\Delta x]$ اختیار کرد.)

طرفین‌نامساوی مضاعف بالا را بر Δx تقسیم می‌کنیم (طبق‌شکل $\Delta x>0$ است‌و تقسیم برΔx جهت نامساوی را تغییرنمی‌دهد) :

$$MP<\frac{\Delta S}{\Delta x}<NQ$$

حال Δx را به‌سوی صفــر میل می‌دهیم . چون MP ثابت است عرض QN به سوی MP

نزدیک می‌شود(زیرا y تابعی است پیوسته). درنتیجه خواهیم داشت :

$$\underset{\Delta x \to 0^{+}}{\text{حد}} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right) = y(=MP)$$

به همین ترتیب می‌توان برای حالت $\Delta x < 0$ بحث را دنبال کرد و به دست آورد که :

$$\underset{\Delta x \to 0^{-}}{\text{حد}} \left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right) = y = (MP)$$

یعنی : $\frac{ds}{dx} = y$ وازآنجا $dS = ydx$ وسرانجام : $S = \int ydx$

لذا می‌توان قضیه زیر را بیان کرد :

۷-۱۰- قضیه- فرض کنید کـه تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و غیرمنفی باشد و $a \leqslant t \leqslant b$. فرض کنید $S(t)$ مساحت سطح محصور به منحنی نمایش f ومحور x ها و خطوط $x=a$ و $x=t$ باشد. آنوقت مشتق تابع S در هر نقطه برابر f است یعنی

$$S'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b]$$

حال فرض می‌کنیم که: $\int f(x)dx = F(x) + c$

هنگامی که x برابر a اختیار شود سطح صفر است و لذا خواهیم داشت:

$$0 = F(a) + c$$

وازآنجا: $c = -F(a)$

حال اگر xرا b اختیار کنیم و$F(b) - F(a)$ را بـا $[F(x)]_a^b$ نشان‌دهیم، سطح مربوط برابر خواهد بود با:

$$S(b) = F(b) + c = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

یعنی :

۷-۱۱- قضیه - فرض کنیدکه F تابع اولیه‌ای برای تابع پیوسته و غیرمنفی f باشد. سطح‌محصور بین منحنی نمایش تغییرات‌تابع $y=f(x)$ ومحورxهـا و دوخط به معادلهٔ $x=a$ و$x=b$ (به‌فرض$b>a$) برابر است با:

$$\boxed{S = F(b) - F(a)}$$

مرسوم است که عدد $S = F(b) - F(a)$ را به شکل:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

بنویسند و آن را چنین قرائت کنند:

« انتگرال $f(x)dx$ از a تا b »

واضح است که حاصل $\int_a^b f(x)dx$ عددی است معین و معلوم و به‌همین دلیل انتگرالهایی

نظیر:

$$\int_a^b f(x)dx$$

را انتگرال معین و سایر انتگرالها را نامعین نامگذاری می‌کنند. a و b را حدود انتگرال معین می‌گویند. لازم به تذکر است که مفهوم کلی انتگرال معین و انتگرال‌گیری چیز دیگری است و در آن لازم نیست تابع مورد بحث پیوسته یا غیرمنفی باشد. مفهوم انتگرال معین را در درسهای عالی‌تر ریاضی مورد بحث قرار می‌دهند و چیزی که ما در اینجا به عنوان مساحت زیر منحنی یك تابع غیر منفی و پیوسته مورد بحث قرار دادیم به حالت خاصی از انتگرال معین ارتباط پیدا می‌کند و مقدار مساحت در این حالت همان انتگرال معین تابع خواهد شد.

عدد ثابت در محاسبهٔ انتگرالهای معین از بین میرود ، زیرا :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)+c\Big]_a^b=F(b)+c-F(a)-c=F(b)-F(a)$$

و به همین دلیل درمحاسبات انتگرالهای معین عدد ثابت انتگرالگیری را نمی‌نویسند.

مثال - مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=-x^2+5x$ و محور xها وخطوط $x=1$ و $x=4$

طبق گفتار بالا خواهیم داشت:

$$S=\int_1^4(-x^2+5x)dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}\Big]_1^4$$

$$=\Big(\frac{-64}{3}+\frac{80}{2}\Big)-\Big(-\frac{1}{3}+\frac{5}{2}\Big)=\frac{-63}{3}+\frac{75}{2}=-21+\frac{75}{2}=\frac{33}{2}$$

یادآوری- در گفتارهای بعد مطالب بیشتری در مورد محاسبهٔ سطح زیر منحنی و حجم حاصل از دوران منحنی حول محور xها بیان خواهیم داشت. در این گفتار فقط به این مطلب اشاره می‌کنیم که اگر برای محاسبهٔ انتگرال معین به تغییر متغیر نیازمند شدیم باید حدود انتگرالگیری را نیز تغییر دهیم. (البته این مطلب احتیاج به اثبات دارد ولی ما در اینجا آن

را بدون اثبات می‌پذیریم).

مثال ـ محاسبهٔ:

$$\int_{0}^{3} \frac{(x-2)dx}{\sqrt{5x+1}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{5x+1}=u$ باشد. درنتیجه:

$$5x+1=u^2 \Longrightarrow 5dx=2udu \Longrightarrow dx=\frac{2}{5}udu$$

$$x-2=\frac{u^2-1}{5}-2=\frac{u^2-11}{5}$$

$$x=3 \Longrightarrow u=\sqrt{5x+1}=\sqrt{15+1}=4$$

$$x=0 \Longrightarrow u=\sqrt{0+1}=1$$

سرانجام:

$$\int_{0}^{3}\frac{(x-2)dx}{\sqrt{5x+1}}=\int_{1}^{4}\frac{\frac{u^2-11}{5}\times\frac{2}{5}udu}{u}=\frac{2}{25}\int_{1}^{4}(u^2-11)du$$

$$=\frac{2}{25}\left[\frac{u^3}{3}-11u\right]_{1}^{4}=\frac{2}{25}\left[\frac{64}{3}-44-\left(\frac{1}{3}-11\right)\right]$$

$$=\frac{2}{5}(-12)=\frac{-24}{5}$$

تمرین

انتگرالهای معین زیررا حساب کنید.

۱) $\int_{2}^{6}(3x^3+4x^2-2x+1)dx$

۲) $\int_{1}^{2}x^5dx$

۳) $\int_{1}^{6}(4x^4-3)dx$

۴) $\int_{1}^{2}(x^2+1)^5\times 2x\,dx$

۵) $\int_{0}^{2}(x^3+2)\times 3x^2dx$

۶) $\int_{0}^{2}\frac{(8x-3)dx}{\sqrt{4x+1}}$

۷) $\int_{0}^{7}\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x+9}}$

انتگرال تابعهای مثلثاتی

۷-۱۲- فرمولهای اصلی- با توجه به فرمولهای مشتق گیری از تابعهای مثلثاتی داریم:

$$d(\cos u)=-\sin u\cdot du$$

$$d(\sin u)=\cos u\cdot du$$

$$d(tg u)=\sec^2 u\cdot du=\frac{du}{\cos^2 u}=(1+tg^2 u)du$$

$$d(cotg u)=-\operatorname{cosec}^2 u\cdot du=\frac{-du}{\sin^2 u}=-(1+cotg^2 u)du$$

از این فرمولها به‌ترتیب نتیجه خواهد شد:

$$(1)\ \int \sin u\cdot du=-\cos u+c$$

$$(2)\ \int \cos u\cdot du=\sin u+c$$

$$(3)\ \int\frac{du}{\cos^2 u}=\int \sec^2 u\cdot du=\int(1+tg^2 u)du=tg u+c$$

$$(4)\ \int\frac{du}{\sin^2 u}=\int \operatorname{cosec}^2 u\cdot du=\int(1+cotg^2 u)du=-cotg u+c$$

از این فرمولها در انتگرال‌گیری بسیاری از تابعهای مثلثاتی استفاده می‌شود. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱ - محاسبهٔ: $I=\int \sin 3x\,dx$

فرض می‌کنیم $3x=u$ ازآنجا $3dx=du$، یعنی $dx=\frac{1}{3}du$ ، در نتیجه:

$$I=\int \sin u \times \frac{۱}{۳}du=\frac{۱}{۳}\int \sin u\,du=\frac{۱}{۳}(-\cos u)+c$$

$$\int \sin ۳x\,dx=-\frac{۱}{۳}\cos ۳x+c$$

مثال ۲ - محاسبه :

$$I=\int ۲\cos ۲x\,dx$$

فرض می کنیم $۲x=u$. از آنجا : $۲dx=du$ و $dx=\frac{۱}{۲}du$:

$$I=\int ۲\cos ۲x\,dx=\int ۲\cos u\times\frac{۱}{۲}du=\int \cos u\,du=\sin u+c$$

$$\int ۲\cos ۲x\,dx=\sin ۲x+c$$

مثال ۳- محاسبهٔ:

$$I=\int ۴(۱+tg^{۲}۴x)dx$$

فرض می کنیم $۴x=u$. از آنجا $dx=\frac{۱}{۴}du$ ودرنتیجه:

$$I=\int ۴(۱+tg^{۲}u)\times\frac{۱}{۴}du=\int(۱+tg^{۲}u)du=tg\,u+c$$

$$\int ۴(۱+tg^{۲}۴x)dx=tg\,۴x+c$$

مثال۴- محاسبهٔ :

$$I=\int\frac{-۹dx}{\sin^{۲}۳x}$$

فرض می کنیم $۳x=u$. از آنجا $dx=\frac{۱}{۳}du$. یعنی:

$$I=\int\frac{-۹\times\frac{۱}{۳}du}{\sin^{۲}u}=-۳\int\frac{du}{\sin^{۲}u}=+۳\times cotg\,u+c$$

$$I=۳cotg\,۳x+c$$

مثال۵- محاسبهٔ:

$$I=۱۸\int \sin^{۵}x\cos x\,dx$$

فرض می کنیم $\sin x=u$ درنتیجه $\cos x\,dx=du$ می‌شود واز آنجا:

$$I=۱۸\int u^{۵}du=۱۸\times\frac{u^{۵+۱}}{۵+۱}+c=۳u^{۶}+c$$

$$I=۳\sin^{۶}x+c$$

مثال۶- محاسبهٔ: $I=\int \sin^5 x dx$

نخست یادآور می‌شویم که دراین قبیل مسائل اگر توان $\sin x$ فرد باشد روش زیر را می‌توان بکار برد و اگر توان آن زوج باشد باید روش دیگری درپیش گرفت.

$$I=\int \sin^5 x dx=\int \sin^4 x \times \sin x dx=\int (1-\cos^2 x)^2 \times \sin x dx$$
$$=\int \sin x(1+\cos^4 x-2\cos^2 x)dx$$
$$=\int \sin x dx+\int \cos^4 x \sin x dx-2\int \cos^2 x \sin x dx$$
$$=-\cos x+c_1+\int \cos^4 x \sin x dx-2\int \cos^2 x \sin x dx$$

اینك فرض می‌کنیم $\cos x=u$ باشد در نتیجه خواهیم داشت $-\sin x dx=du$ و ازآنجا:

$$\int \cos^4 x \sin x dx=\int u^4(-du)=-\frac{u^5}{5}+c_2$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx=\int u^2(-du)=-\frac{u^3}{3}+c_3$$

حال با درنظرگرفتن $c_1+c_2-2c_3=c$ خواهیم داشت:

$$I=-\cos x-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{2\cos^3 x}{3}+c=\frac{-1}{15}\cos x(15+3\cos^4 x-10\cos^2 x)+c$$

مثال۷- محاسبهٔ: $I=12\int \sin^2 3x dx$

نخست چنین می‌نویسیم:

$$I=12\int \frac{1}{2}(1-\cos 6x)dx=6\int dx-6\int \cos 6x dx$$

سپس با روشهای مثالهای بالا عمل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$I=12\int \sin^2 3x dx=6x-\sin 6x+c$$

مثال۸- محاسبهٔ: $I=36\int \cos^2 6x dx$

طبق مسئلهٔ بالا عمل می‌کنیم. چنین می‌شود:

$$I=36\int \cos^2 6x dx=36\int \frac{1}{2}(1+\cos 12x)\, dx=18\int dx+18\int \cos 12x dx$$

$$=18x+\frac{3}{2}\sin 12x+c$$

مثال۹- محاسبهٔ: $I=\int \cos^6 x dx$

انتگرال بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int \cos^6 x dx=\int (\cos^2 x)^3 dx$$

$$I=\int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^3 dx=\frac{1}{8}\int (1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{3}{8}\int \cos 2x dx+\frac{3}{8}\int \cos^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\int \cos^2 2x dx+\frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

ولی می‌توان چنین نوشت:

$$\int \cos^2 2x dx=\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\, dx=\int \frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int \cos 4x dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x$$

برای محاسبهٔ $\int \cos^3 2x dx$ کافی است آنرا چنین بنویسیم:

$$\int \cos^3 2x dx=\int \cos^2 2x \cos 2x dx=\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x dx$$

$$=\int \cos 2x dx-\int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\int \sin^2 2x \cos 2x dx$$

برای محاسبه $\int \sin^2 2x \cos 2x dx$ فرض می‌کنیم $\sin 2x=u$ باشد در نتیجه $2\cos 2x dx=du$ بوده وخواهیم داشت:

$$\int \sin^2 2x \cos 2x dx=\int u^2\times\frac{1}{2}du=\frac{1}{6}u^3=\frac{1}{6}\sin^3 2x$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$I=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+c$$

سرانجام :

$$I=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$$

مثال ۱۰- محاسبهٔ :

$$I=\int \frac{tg^2 x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$$

انتگرال را چنین می‌نویسیم:

$$I=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\times\frac{1}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$$

$$=\int \frac{\sin x(1-\cos^2 x)dx}{\cos^2 x\times\cos^{\frac{3}{5}} x}=\int\frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{18}{5}} x}-\int\frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{8}{5}} x}$$

$$=\int \cos^{-\frac{18}{5}} x \sin x dx-\int \cos^{-\frac{8}{5}} x \sin x dx$$

حال فرض می‌کنیم که $\cos x=u$ باشددر نتیجه خواهیم داشت $\sin x dx=-du$

و از آنجا :

$$I=\int u^{-\frac{18}{5}}(-du)-\int u^{-\frac{8}{5}}(-du)$$

$$=-\int u^{-\frac{18}{5}}du+\int u^{-\frac{8}{5}}du=-\frac{u^{-\frac{18}{5}+1}}{-\frac{18}{5}+1}+\frac{u^{-\frac{8}{5}+1}}{-\frac{8}{5}+1}+c$$

$$=\frac{-u^{-2-\frac{3}{5}}}{-\frac{13}{5}}+\frac{u^{-\frac{3}{5}}}{-\frac{3}{5}}+c$$

$$=\frac{5}{13u^2\sqrt[5]{u^3}}-\frac{5}{3\sqrt[5]{u^3}}+c=\frac{5}{\sqrt[5]{u^3}}\left(\frac{1}{13u^2}-\frac{1}{3}\right)+c$$

سرانجام :

$$I=\frac{5}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\left(\frac{1}{13\cos^2 x}-\frac{1}{3}\right)+c$$

مثال ۱۱ـ محاسبهٔ : $\int tg^2 x dx$

انتگرال را چنین می‌نویسیم :

$$\int tg^2 x dx=\int(1+tg^2 x-1)dx$$

$$=\int(1+tg^2 x)dx-\int dx=tg x-x+c$$

مثال۱۲ـ محاسبهٔ:

$$I=\int tg^4 x\,dx$$

$$I=\int tg^4 x\,dx=\int (tg^2x+tg^4x-tg^2x)dx$$
$$=\int tg^2x(1+tg^2x)dx-\int tg^2x\,dx$$

با درنظر گرفتن مثال ۱۱ و فرض $tgx=u$ و از آنجا $(1+tg^2x)dx=du$ خواهیم‌داشت:

$$I=\frac{1}{3}tg^3x-tgx+x+c$$

مثال۱۳ـ محاسبهٔ:

$$\int cotg^2x\,dx$$

انتگرال را چنین می‌نویسیم:

$$\int cotg^2x\,dx=\int (1+cotg^2x-1)dx$$
$$=\int (1+cotg^2x)dx-\int dx=-cotgx-x+c$$

مثال۱۴ـ محاسبهٔ :

$$I=\int 120(\sin 3x-\cos 2x)^2dx$$
$$I=\int 120(\sin^2 3x+\cos^2 2x-2\sin 3x\cos 2x)dx$$
$$=\int 120\left(\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}-\sin 5x-\sin x\right)dx$$
$$=\int 120\left(1-\frac{1}{2}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 4x-\sin 5x-\sin x\right)dx$$
$$=\int 120dx-\int 60\cos 6x\,dx+\int 60\cos 4x\,dx-\int 120\sin 5x\,dx-\int 120\sin x\,dx$$
$$I=120x-10\sin 6x+15\sin 4x+24\cos 5x+120\cos x+c$$

تمرین

انتگرالهای زیر را محاسبه‌کنید

۱) $\int \sin x\,dx$

۲) $\int \cos x\,dx$

۳) $5\int \sin 5x\,dx$

۴) $6\int \cos 2x\,dx$

۵) $\int tg^2x\,dx$

۶) $\int \frac{dx}{\cos^2x}$

۷) $\int \frac{dx}{\sin^2x}$

۸) $\int cotg^2x\,dx$

۹) $\int \sin^8x\cos x\,dx$

۱۰) $\int \cos^8x\sin x\,dx$

۱۱) $\int \sin^3x\,dx$

۱۲) $\int \cos^3x\,dx$

۱۳) $\int \cos^4 x\,dx$

۱۴) $\int \sin^6 x\,dx$

۱۵) $8\int tg^7 x(1+tg^2 x)dx$

۱۶) $7\int cotg^6 x(1+cotg^2 x)dx$

۱۷) $6\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x}dx$

۱۸) $6\int \frac{\cos^5 x}{\sin^7 x}dx$

۱۹) $\int tg^5 3x \times \frac{dx}{\cos^2 3x}$

۲۰) $\int cotg^4 2x \times \frac{dx}{\sin^2 2x}$

۲۱) $48\int (\sin 2x - \cos 3x)^2 dx$

۲۲) $\int (\sin 3x - \sin x)^2 dx$

درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۲۳) $\int \sec x\, tg^7 x\,dx = \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{3}{5\cos^5 x} + \frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + c$

۲۴) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+tg x}} = 2\sqrt{1+tg x} + c$

۲۵) $\int \frac{cotg^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\sin x}} = \frac{55\sin^2 x - 5}{11\sin^2 x\sqrt[5]{\sin x}} + c$

۲۶) $\int \frac{cotg x\,dx}{\sin x\sqrt{1+cosec x}} = 2\sqrt{1+cosec x} + c$

۲۷) $\int \frac{tg^7 x.dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{9\cos^9 x} - \frac{3}{7\cos^7 x} + \frac{3}{5\cos^5 x} - \frac{1}{3\cos^3 x} + c$

۲۸) $\int \frac{tg x\,dx}{\sqrt{1+\cos 2x}} = \frac{\sqrt{2}}{2\cos x} + c$

۲۹) $\int \sec^2 x\sqrt{cotg x}\,dx = 2\sqrt{tg x} + c$

۳۰) $\int \sin^2 x\cos^5 x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$

۳۱) $\int tg^6 x\,dx = \frac{1}{5}tg^5 x - \frac{1}{3}tg^3 x + tg x - x + c$

۳۲) $\int tg^6 x\sec^4 x\,dx = \frac{tg^9 x}{9} + \frac{tg^7 x}{7} + c$

۳۳) $\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} - \frac{\sin^3 2x}{48} + c$

۳۴) $\int (\sin^2 x + \cos x)^2 dx = \frac{7x}{8} + \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin 4x}{32} + c$

۳۵) $\int \cot g^6 x dx = -\frac{1}{5}\cot g^5 x + \frac{1}{3}\cot g^3 x - \cot g x - x + c$

محاسبه سطح و حجم دوار

۷-۱۳- محاسبهٔ سطح بین منحنی و محور طولها - در گفتار انتگرال معین ، اشاره کردیم که سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ ومحور xها، و خطوط $x=a$ و $x=b$ $(b>a)$ با دستور:

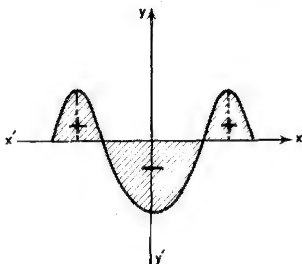
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

به دست می‌آید. البته درآنجا فرض براین بود که مقدار تابع یعنی $f(x)$ درفاصلهٔ $[a,b]$ بزرگتر یامساوی صفر باشد. یعنی داشتیم : $f(x)\geqslant 0$.

اگر در فاصله $[a,b]$ داشته باشیم : $f(x)<0$ و اگر F تابع اولیه‌ای برای f باشد ، آنوقت F نزولی بوده (زیرا مشتق آن یعنی f منفی است) ودر نتیجه عدد

$$\int_a^b f(x)dx \quad =F(b)-F(a)$$

منفی خواهد شد . اگر به همان روش حالت $f(x)\geqslant 0$ دراین حالت بحث کنیم خواهیم دیدکه این عدد منهای مساحت سطح بین منحنی و محور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ خواهد شد.



انتگرال‌معین برابر اندازهٔ سطح می‌شود:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

پس اگر $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ در چندین نقطه تغییر علامت دهد یا به‌گفتهٔ بهتر در برخی از فواصل $f(x)>0$ و در برخی دیگر $f(x)<0$ باشد. (شکل صفحه قبل)

باید مقدار انتگرال معین را درهریك از فاصله‌ها جداگانه محاسبه نموده وقدرمطلق‌انتگرال معین قسمتهای واقع درزیر محور طولهارا بمقادیر انتگرال معین قسمتهای بالای محور xها افزود تاسطح کل محصور به منحنی و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ به دست آید.

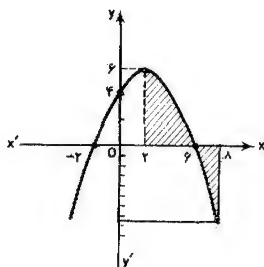
مثال ۱- محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳$$

و محورxها و خطوط $x=۲$ و $x=۸$

اگر منحنی نمایش تغییرات و جدول مربوط به این تابع را رسم کنیم خواهیم داشت:

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		۶		$+\infty$
y′			+				۰		−		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۳	↗	۴	↘	۰	↘	$-\infty$



به‌طوری‌که مشاهده می‌شود قسمتی از سطح که محصور است بین منحنی و محورxها و خطوط $x=۲$ و $x=۶$ بالای محور x ها قراردارد. این قسمت را $S_۱$ می‌نامیم ولی قسمتی ازسطح که محصور است بین منحنی و محور xها وخطوط $x=۶$ و $x=۸$ زیرمحورxها قرار دارد و لذا

برای محاسبه آن قدر مطلق انتگرال آن قسمت را می‌یابیم . این قسمت را S_2 می‌نامیم وخواهیم داشت :

$$S_1=\int_2^6\left(-\frac{1}{4}x^2+x+3\right)dx=\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^6=$$

$$\left(-\frac{216}{12}+\frac{36}{2}+18\right)-\left(-\frac{8}{12}+\frac{4}{2}+6\right)=-\frac{208}{12}+36-8=$$

$$-\frac{52}{3}+28=\frac{32}{3}$$

$$S_2=\left|\int_6^8\left(-\frac{1}{4}x^2+x+3\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_6^8\right|$$

$$=\left|\left(-\frac{512}{12}+\frac{64}{2}+24\right)-\left(-\frac{216}{12}+\frac{36}{2}+18\right)\right|=\left|-\frac{296}{12}+20\right|$$

$$=\left|-\frac{74}{3}+20\right|=\left|-\frac{14}{3}\right|=\frac{14}{3}$$

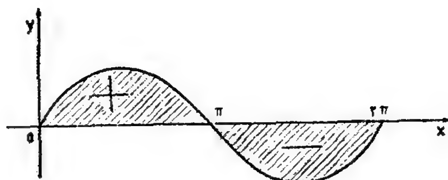
در نتیجه :

$$S=S_1+S_2=\frac{32}{3}+\frac{14}{3}=\frac{46}{3}$$

مثال ۲- محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ و محور xها و خطوط $x=0$ و $x=2\pi$.

چون به ازای $0<x<\pi$ خواهیم داشت : $\sin x>0$ و همچنین به‌ازای $\pi<x<2\pi$ خواهیم داشت $\sin x<0$ پس خواهیم داشت:

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\,dx\right|$$



ولی :

$$\int_{0}^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$$

$$\left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = \left|\Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}\right| = \left|-\cos 2\pi + \cos\pi\right|$$

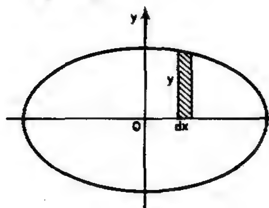
$$= \left|-1-1\right| = 2$$

و ازآنجا :

$$S = 2 + 2 = 4$$

مثال ۴ : تعیین مساحت بیضی - می‌خواهیم تعیین مساحت بیضی‌ای که بوسیلهٔ معادلهٔ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



داده شده‌است را به دست‌آوریم. درصفحه دستگاه محورهای مختصات بیضی مورد بحث را بوسیلهٔ شکل نشان داده‌ایم .

اگرمساحت بیضی‌را به S بنامیم خواهیم داشت :

$$S = 4\int_{0}^{a} y dx = 4\int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

برای محاسبهٔ این انتگرال تغییر متغیر می‌دهیم به‌صورت زیر:

$$x = a\sin t \implies dx = a\cos t dt$$

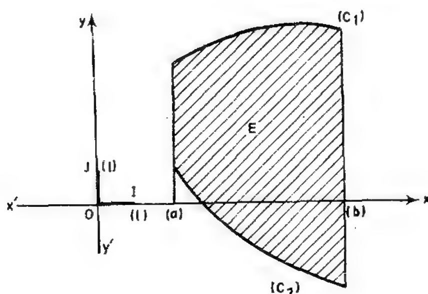
$$0 < x < a \implies 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$S = 4\int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$S = 2ab\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S = \pi ab$$

۷—۱۴— سطح محصور بین دومنحنی— برای محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیهای نمایش تغییرات دوتابع $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ که درآن $f_2(x) \leqslant f_1(x)$ (طبق شکل) ، چنین عمل می کنیم :



$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

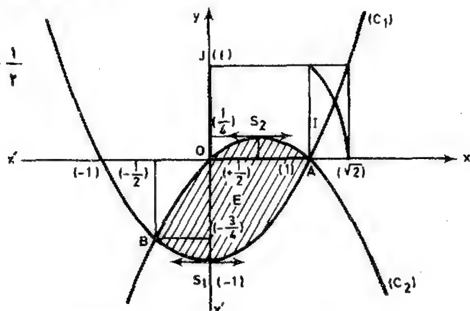
مثال۱- محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیهای نمایش تغییرات دوتابع زیر:

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=-x^2+x \end{cases}$$

نخست طولهای نقاط تقاطع دومنحنی را می‌یابیم:

$$x^2-1=-x^2+x \qquad 2x^2-x-1=0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$



حال باتوجه به‌شکل دومنحنی که دربالا رسم شده است وآنچه که در بالا دیده‌ایم خواهیم

داشت :

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}[f_2(x)-f_1(x)]dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}[(-x^2+x)-(x^2-1)]dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\frac{9}{8}$$

تمرین

۱ــ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=4-x^2$ و محور xها. (جواب $=10\frac{2}{3}$)

۲ــ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^3$ وخط $y=8$ و محور yها را حساب کنید. (جواب $=12$)

۳ــ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2=9x$ وخط $y=3x$ را حساب کنید. (جواب $=\frac{1}{2}$)

۴ــ سطح محصور بین منحنی بــه معادلهٔ $x^2y=a^2$ و محور xهــا و خطــوط $x=a$ و $x=2a$ را حساب کنید $(a>0)$. (جواب $=\frac{a}{2}$)

۵ــ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین یکی از طاق‌های منحنی $y=\sin x$ و محور xها. (جواب $=2$)

۶ــ سطح محصور بین سهمی‌های $y^2=2px$ و $x^2=2py$ را حساب کنید.

(جواب $=\frac{4}{3}p^2$)

۷ــ تمام سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خطهای $y=2x$ و $y=x$ راحساب کنید.

(جواب $=\frac{3}{2}$)

۷-۱۵ــ محاسبه حجم برخی از اجسام دوار. فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ درفاصله **$[a,b]$ معین‌وپیوسته وغیرمنفی‌باشد . دراین گفتارمی‌خواهیم‌حجم‌حاصل از دوران سطح‌محصور بین** منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ ومحور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول **محورxها را محاسبه‌کنیم . فرض کنید که $a<x<b$ و $V(x)$ حجم آن قسمت از جسم دوار**

که بین صفحات عمود برمحور xها درنقاط به طول x و $x+\Delta x$ واقع شده است برابر است با

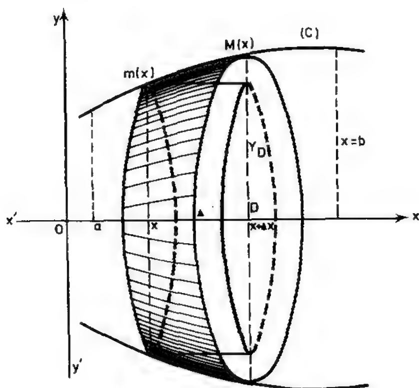
$$\Delta V=V(x+\Delta x)-V(x)$$

فرض کنید که $m(x)$ و $M(x)$ به ترتیب می نیمم مطلق وماکزیمم مطلق تابع f درفاصلهٔ $[x,x+\Delta x]$ باشد. (برای توابع پیوسته ثابت می کنند که چنین ماکزیمم و می نیممی موجود است). آنوقت حجم ΔV ازحجم استوانه به ارتفاع Δx و شعاع قاعده $m(x)$ بزرگتر وازحجم استوانهٔ به ارتفاع Δx وشعاع قاعده $M(x)$ کمتر است. (به شکل مراجعه شود) یعنی

$$\pi m^2(x)\Delta x\leqslant\Delta v\leqslant\pi M^2(x)\Delta x$$

و چون بر Δx تقسیم کنیم (Δx مثبت فرض شده است) داریم:

$$(1)\qquad \pi m^2(x)\leqslant\frac{\Delta v}{\Delta x}\leqslant\pi M^2(x)$$



حال اگر Δx را بسمت صفر میل دهیم، چون تابع f در $[x,x+\Delta x]$ پیوسته است ماکزیمم و می نیمم مطلق آن در این فاصله یعنی $M(x)$ و $m(x)$ به سمت $f(x)$ میل کرده و لذا حد دو طرف نامساویهای (۱) باهم برابر میشوند. پس حد $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ نیز موجود بوده و برابر حد مشترك دو طرف (۱) یعنی $\pi f^2(x)$ می شود، یعنی

$$\underset{\Delta x\to 0^{+}}{\text{حد}}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\pi f^2(x)$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pi f^2(x)$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{dv}{dx} = \pi f^2(x)$$

و لذا
$$V(x) = \int \pi f^2(x)dx = \int \pi y^2 dx$$

حال اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ای برای $\pi f^2(x)$ باشد آنوقت داریم:

$$V(x) = F(x) + C$$

وچون $V(a) = 0$ ، پس $C = -F(a)$. لذا اگر V حجم جسم دوار حاصل باشدداریم

$$V = V(b) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

مثال ۱- مطلوب است حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^2 - 6x + 5$ ومحورxها وخطوط $x = 2$ و $x = 4$ حول محورxها.

طبق فرمول خواهیم داشت:

$$V = \int_2^4 \pi y^2 dx = \int_2^4 \pi(x^2 - 6x + 5)^2 dx$$

یا:
$$V = \pi\int_2^4 (x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25)dx$$

$$V = \pi\left[\frac{x^5}{5} - 3x^4 + \frac{46}{3}x^3 - 30x^2 + 25x\right]_2^4 = \frac{406\pi}{15}$$

مثال ۲- محاسبهٔ حجم حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حول محور xها.

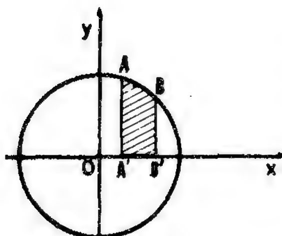
معادلهٔ بیضی را می‌توان چنین نوشت:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

چون دو کرانهٔ بیضی بطولهای $x = a$ و $x = -a$ هستند. پس:

$$V = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$V = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2$$



مثال ۳ - مطلوب است محاسبهٔ حجم قطعه‌ای از کره به‌شعاع R که بین دوصفحهٔ موازی محصور باشد

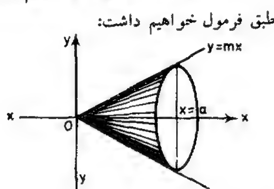
چنین حجمی از دوران سطحی که محصور است بین محور xها و کمان AB از دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ و خطوط $x=a$ (پاره خط AA') و $x=b$ (پاره‌خط BB') درحول محور xها حاصل می‌شود. پس‌خواهیم داشت:

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(R^2-x^2)dx=\pi\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_a^b$$

$$=\pi(b-a)\left[R^2-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right]$$

مثال۴- محاسبهٔ حجم حاصل از دوران سطحی حول محورxها که محصور است بین خط $y=mx$ ومحور xها وخط $x=a$ (حجم مخروط).

طبق فرمول خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_0^a y^2dx$$

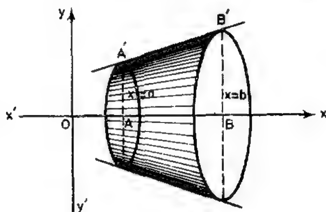
$$V=\pi\int_0^a m^2x^2dx$$

$$V=\pi\left[m^2\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\pi m^2\frac{a^3}{3}$$

با در نظر گرفتن اینکه ma همان AB یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط و a طول ارتفاع آن است. خواهیم داشت $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ که همان دستور هندسی محاسبه حجم مخروط است

مثال۵- محاسبهٔ حجم‌مخروط ناقص‌دواری که‌ازدوران سطح‌محصور بین‌خط $y=mx+n$ ومحور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول محورxها پدید می‌آید.

طبق فرمول خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_a^b(mx+n)^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{(mx+n)^3}{3m}\right]_a^b$$

$$=\pi\left(\frac{mb+n}{3m}\right)^3-\pi\left(\frac{ma+n}{3m}\right)^3$$

با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$ خواهیم داشت:

$$V=\pi\left(\frac{mb+n}{3m}-\frac{na+n}{3m}\right)$$

$$\times[(mb+n)^2+(ma+n)^2+(mb+n)\times(ma+n)]$$

$$V=\frac{\pi}{3}(b-a)[(mb+n)^2+(ma+n)^2+(mb+n)(ma+n)]$$

ولی $b-a$ برابر ارتفاع مخروط ناقص است که در هندسه با h نشان داده می‌شود و $mb+n=BB'$ و $ma+n=AA'$ است که در هندسه به‌ترتیب با R و R' یعنی شعاعهای دوقاعده نشان داده می‌شوند. درنتیجه خواهیم داشت:

$$V=\pi\frac{h}{3}(R^2+R'^2+RR')$$

تمرین

سطح محصور بین محور xها و منحنی‌های زیر و حدود معین شده درهریك‌را محاسبه‌کنید:

۱) $y=x^2+3$ و $x=-1$ و $x=2$ $(S=12)$

۲) $y=x^2(3-x)$ و $x=4$ و $x=5$ $(S=31\frac{1}{4})$

۳) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ $(S=1\frac{7}{24})$

سطح محصور بین محور y ها ومنحنی‌های زیروخطوط داده شده در هرقسمت را حساب کنید.

۴) $x=y^2$ و $y=3$ $(S=9)$

۵) $y=x^3$ و $y=1$ و $y=8$ $(S=11\frac{1}{4})$

۶) $x=+\frac{1}{\sqrt{y}}$ و $y=2$ و $y=3$ $(S=2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

سطح محصور بین هریك از منحنی‌های زیر و محور yها را حساب کنید:

۷) $x=(y-1)(y-4)$ $(S=4\frac{1}{2})$

۸) $x=3y-y^2$ $(S=4\frac{1}{2})$

۹) $x=y(y-2)^2$ $\qquad (S=1\frac{1}{3})$

سطح محصور بین هریك از منحنی‌های زیر و خطوط داده شده را حساب کنید:

۱۰) $y=x^2-2x+2$ و $y=5$ $\qquad (S=10\frac{2}{3})$

۱۱) $y=x^2-6x+9$ و $y=1$ $\qquad (S=1\frac{1}{3})$

۱۲) $y=-x^2+3x-4$ و $y=-4$ $\qquad (S=4\frac{1}{2})$

۱۳) $y=x(x-2)$ $\quad y=x$ $\qquad (S=4\frac{1}{2})$

۱۴) $y=4-3x-x^2$ $\quad 2x+y+2=0$ $\qquad (S=20\frac{5}{6})$

۱۵) $y=x^2-6x+2$ $\quad x+y-2=0$ $\qquad (S=20\frac{5}{6})$

سطح محصور بین دو منحنی‌داده شده در هریك از مسایل زیر را حساب کنید:

۱۶) $y=x(x-1)$ و $y=x(2-x)$ $\qquad (S=\frac{9}{8})$

۱۷) $y=x(x+3)$ و $y=x(5-x)$ $\qquad (S=\frac{1}{3})$

۱۸) $y=x^2-5x$ و $y=3x^2-6x$ $\qquad (S=\frac{1}{24})$

۱۹) $y^2=4x$ و $x^2=4y$ $\qquad (S=\frac{16}{3})$

۲۰) $y=x^2-3x-7$ و $y=5-x-x^2$ $\qquad (S=41\frac{2}{3})$

۲۱ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{1}{x^2}$ وخط $10x+4y-21=0$ را محاسبه کنید (راهنمائی ـ یکی از نقاط تقاطع به طول $-\frac{2}{5}$ و عرض $\frac{25}{4}$ است).

[جواب ـ نقاط دیگر تقاطع عبارتند از:

$[S=1\frac{11}{16}$ و $(2\,,\frac{1}{4})$ و $(\frac{1}{2}\,,4)$

۲۲ـ سطح محصور بین خط $y=\frac{۳}{۴}x$ و خط $x=۴$ و محورxها حول محور طولها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

(جواب $V=۱۲\pi$)

۲۳ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^{۲}$ و خطوط $y=۱$ و $y=۴$ حول محورyها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

(جواب $V=\frac{۱۵\pi}{۲}$)

راهنمائی ـ از دستور $V=\int_{۱}^{۴}\pi x^{۲}dy$ استفاده کنید:

۲۴ـ سطح محصور بین منحنی $y=x^{۲}+۱$ وخط $y=۵$ حول محورxها دوران می‌کند. حجم حاصل را محاسبه کنید.

(جواب $V=۷۲\frac{۸}{۱۵}\pi$)

هریك از سطوح محصور بین منحنی و خطوط داده شده در زیر حول محور xها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

۲۵) $x+۲y-۱۲=۰$, $x=۰$, $y=۰$ ($V=۱۴۴\pi$)

۲۶) $y=x^{۲}+۱$, $y=۰$, $x=۰$, $x=۱$ ($V=\frac{۲۸}{۱۵}\pi$)

۲۷) $y=\sqrt{x}$, $y=۰$, $x=۲$ ($V=۲\pi$)

۲۸) $y=x(x-۲)$, $y=۰$ ($V=\frac{۱۶}{۱۵}\pi$)

۲۹) $y=x^{۲}(۱-x)$, $y=۰$ ($V=\frac{\pi}{۱۰۵}$)

۳۰) $y=\frac{۱}{x}$, $y=۰$, $x=۱$, $x=۴$ ($V=\frac{۳\pi}{۴}$)

هریك از سطوح محصور بین منحنی وخطوط داده شده در زیر حول محور yها دوران می‌کند. حجم حاصل را حساب کنید.

۳۱) $y=۲x-۴$, $y=۲$, $x=۰$ ($V=۱۸\pi$)

۳۲) $x=\sqrt{y+۱}$, $x=۰$, $y=۲$ ($V=\frac{۹\pi}{۲}$)

۳۳) $x-y^2-2=0,\ x=0,\ y=0\ ,y=3$ $(V=86\frac{3}{5}\pi)$

۳۴) $y^2=x+4\ ,\ x=0$ $(V=34\frac{2}{15}\pi)$

۳۵) $y=1-x^3\ ,\ x=0\ ,\ y=0$ $(V=\frac{3\pi}{5})$

۳۶) $xy=1\ ,\ x=0\ ,\ y=2\ ,\ y=5$ $(V=\frac{3\pi}{10})$

۳۷ــ در ظرفی به شکل نیمکره به شعاع ۱۲ سانتیمتر آب می‌ریزیم هنگامی که ارتفاع آب در داخل ظرف به ۸ سانتیمتر برسد. حجم آب را حساب کنید.

(جواب $661\frac{1}{3}\pi cm^3$)

۳۸ــ در ظرف کره‌ای شکل به قطر ۲۰ سانتیمتر برای نگاهداری ماهی به ارتفاع ۱۸ سانتیمتر آب ریخته‌ایم حجم آب داخل ظرف را حساب کنید.

(جواب $1296\pi cm^3$)

۳۹ــ تابع اولیه تابع $f(x)=\frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ را بیابید که به‌ازای $x=2$ برابر $\frac{2}{3}$ گردد.

۴۰ــ درصورتیکه $f(x)=\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}$ و $1+\cos x\neq 0$ باشد مطلوبست محاسبهٔ:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

$$J=\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$$

۴۱ــ درصورتیکه $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$ و $0<\lambda<1$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $I=\int_\lambda^1 f(x)dx$ برحسب λ و حد I وقتی که $\lambda\to 0$.

۴۲ـ سطح محصور بین منحنی تابع $f(x) = x + ۱ + \frac{۴}{(x-۱)^۲}$ و مجانب مایل آن و دوخط $x = ۳$ و $x = \lambda > ۳$ را برحسب λ حساب‌نموده وحد این سطح را وقتی که $\lambda \to +\infty$ بدست آورید.

۴۳ـ منحنی (C) نمودار تابع f با ضابطهٔ

$$x \in [۰ \text{ و } ۴] \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = ۴\sqrt{x} - x$$

را رسم کنید. نشان دهید که تابع f یك تابع معکوس مانند g دارد که ضابطه و دامنه تعریف وبرد آنرا تعیین خواهید نمود اگر a یك عدد حقیقی از فاصله [۴ و ۰] باشد.

انتگرال زیرا حساب کنید.

$$I(a) = \int_۰^a f(x)dx$$

$$J(a) = \int_۰^{f(a)} g(y)dy$$

ونشان دهید که $I(a) + J(a) = af(a)$ است.

۴۴ـ بدون رسم منحنی سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{۱}{(x-۱)^۲} + \frac{۱}{(x+۱)^۲}$ و محورxها و دو خط $x = ۲$ و $x = \lambda > ۲$ را برحسب λ بیابید وحد این سطح را وقتی که $\lambda \to +\infty$ حساب کنید.

۴۵ـ تابع مشتق تابع u با ضابطهٔ $x \overset{u}{\longmapsto} u(x) = x + \sqrt{x^۲ + ۱}$ را بیابید و با استفاده ازآن تابع اولیه‌های توابع زیررا حساب کنید.

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{(x + \sqrt{x^۲+۱})^۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{g}{\longmapsto} g(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲+۱}\,(x + \sqrt{x^۲+۱})}$$

۴۶ـ اولا مطلوبست محاسبه $F(x) = \int_۰^x \frac{dt}{\sqrt{۱-t}}$ و $۰ < x < ۱$ برحسب x.

ثانیاً مطلوبست حد F(x) وقتی که $x \to ۱^-$ یعنی:

$$\lim_{x \to ۱^-} F(x) = ؟$$

سؤالات امتحان نهایی جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی و فیزیك استانهای کشور

استان اصفهان خرداد ۱۳۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{3x-1} = 2$ ۱/۵ نمره

۲ـ تابع f با دستور زیر مشخص شده پیوستگی آنرا درنقطه $x_0 = 1$ بررسی و نمودار آنرا رسم کنید اگر $x \neq 1$ باشد:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+2)\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

اگر $x = 1$ باشد: ۲/۵ نمره

۳ـ معادلات خطوط مجانب هریك از توابع زیر را تعیین کنید.

$$y = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x+1} \quad \text{و} \quad y = \frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$$

۲/۵ نمره

۴ـ تابع $y = \frac{ax^2+bx+2}{x-1}$ مفروض است: اولا a و b را چنان تعیین کنید تا عرضهای ماکزیمم و می‌نیمم منحنی تابع فوق برابر با ۲ــ و ۲ باشد. ۱/۵ نمره

ثانیاً جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع: $y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ را رسم کنید. ۲/۵ نمره

۵ـ جدول تغییرات ومنحنی نمایش توابع: $y = \pm x\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید.
(جدول یکی از دو تابع کافی است) ۲/۵ نمره

۶ـ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$I_2 = \int \frac{(x^2+2x)dx}{(x+1)^2} \quad \text{و} \quad I_1 = \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt[5]{ax^2+bx+c}}$$

۲ نمره

۷ـ اولا جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y = \frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$ را درفاصله $[0 \text{ و } 2\pi]$ رسم کنید (۲/۵ نمره) ثانیاً مساحت سطح محصور بین منحنی فوق و محور طولها و خطوط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = 0$ را حساب کنید. ۱/۵ نمره

۸ـ درتابع: $y = \frac{x^2+q}{px^2-(q+3)x+q}$ پارامترهای p و q را چنان بیابید تا بەازاء $x = \frac{1}{2}$ تابع برابر $(+\infty)$ شود. ۱ نمره

استان آذربایجان شرقی خرداد ۱۳۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

«از سؤالات ۱ تا ۵ فقط به سه‌سؤال اختیاری پاسخ دهید ـ سؤالهای ۶ و ۷ را تماماً بنویسید»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که: $\lim_{x \to ۲}\left(\frac{۷x-۱۱}{۳}\right)=۱$ حد است.

۲ـ تابعی با ضابطهٔ $f(x)=۲x-\frac{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}{x-۱}$ و $f(۱)=۱$ داده شده است ثابت کنید که تابع f در نقطه $x_۰=۱$ ناپیوسته است. آیا پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۳ـ منحنی $y=\frac{(x+۲)^۲}{x^۲-۱}$ را با خطوط موازی محور ox قطع داده‌ایم وقتیکه این خطوط تغییر کند مکان هندسی اوساط نقاط تلاقی را پیدا کنید.

۴ـ تابع $y=\frac{x^۲+۲ax+a+۲}{x^۲-۱}$ مفروض است مطلوبست محاسبه پارامتر a بطوریکه بین $y_۱$ و $y_۲$ عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم منحنی آن رابطه $y_۱+y_۲+۳=y_۱y_۲$ برقرار باشد.

۵ـ حد تابع $y=\sqrt{x^۲+۳x}-\sqrt{x^۲+۹}$ را وقتیکه $x \to \pm\infty$ حساب کنید.

هر سؤال ۲ نمره

۶ـ تابع اولیه نامعین زیر را حساب کنید $(x>۲)$ (۳ نمره)

$$S=\int\frac{۳(x+۳)dx}{\sqrt{x-۲}}$$

۷ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع‌های زیر را رسم کنید:

$y=\frac{(x+۲)^۲}{x^۲-۱}$ (۳/۵ نمره)

$y=۲\pm\sqrt{x^۲-۲x+۵}$ (۴ نمره)

$y=\sin x+\cos x-۱ \quad (۰\leqslant x\leqslant ۲\pi)$ (۳/۵ نمره)

استان آذربایجان غربی خرداد ماه ۵۹ «مدت ۲/۵ ساعت»

۱- تابع f با ضابطهٔ $\left(f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2}\ ،\ x\neq 0\right)$ داده‌شده با استفاده از تعریف، حد تابع و تعیین یك استلزام منطقی ثابت کنید اگر x بسمت $(+\infty)$ میل کند، $f(x)$ بسمت (۲) میل مینماید.
(۱/۵ نمره)

۲- در تابع f که $[x]$ قسمت صحیح x ، را نمایش میدهد با ضابطهٔ زیر داده شده: ضرایب a و b را چنان تعیین کنید وقتیکه x بسمت (۲) میل میکند تابع پیوستگی راست داشته و حد چپ آن برابر (۳) باشد.
(۲ نمره)

$$f(x)=\begin{cases}[x]+a : & x>2 \quad \text{اگر} \\ 4 : & x=2 \quad \text{اگر} \\ [x]+bx: & x<2 \quad \text{اگر}\end{cases}$$

۳- حد تابع: $y=\dfrac{\cos 2x+\cos x-2}{x^2}$ ، را وقتیکه x بسمت (صفر) میل میکند، پیدا کنید.
(۲/۵ نمره)

۴- تابع f با ضابطهٔ: $\left(f(x)=\dfrac{x^3+2}{x}\ و\ x\geqslant 1\right)$ داده شده ، اولا ثابت کنید تابع f در دامنهٔ تعریفش معکوس پذیر است، ثانیاً اگر معکوس تابع $f(x)$ را با $f^{-1}(x)$ ، نمایش دهیم مطلوبست معادلهٔ خط مماس برمنحنی نمایش تابع $f^{-1}(x)$ درنقطه‌ای بعرض (۲) واقع بر آن.
(۳ نمره)

۵- تابع: $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x-1}$ ، مفروض است:

I- ضرایب a و b و c ، را چنان معین کنید که خط $y=x-2$ ، مجانب مایل منحنی نمایش این تابع بوده و مینیمم تابع برابر (۱) باشد.
(۲ نمره)

II- جدول وتغییرات منحنی (λ) منحنی نمایش تابع، $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$ ، رارسم کنید
(۲/۵ نمره)

III- اگر خط $y=m$ ، منحنی (λ) را درنقاط A و B و محورعرضی را درنقطه e قطع کندطول نقطهٔ D مزدوج توافقی (e) را نسبت بدونقطه A و B ، پیداکنید.
(۱ نمره)

۶- اولا، جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع: $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ، را رسم کنید.(۳/۵ نمره)

ثانیاً انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}}$$
(۲ نمره)

استان آذربایجان شرقی خرداد ماه ۱۳۵۷

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ a را طوری تعیین کنید تا بین y_1 و y_2 عرض‌های نقاط ماکزیمم ومینیمم منحنی (c) بمعادلهٔ $y=\frac{x^2+1}{x+a}$ رابطهٔ $y_1+y_2=y_1y_2$ برقرار باشد. نمره (۲)

۲ـ جدول ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2}$ را رسم کنید. نمره (۲/۵)

۳ـ معادلهٔ درجه سوم $x^3-3x+m=0$ مفروض است:

اولا ـ حدود m را طوری پیداکنید تا معادله سه ریشه ساده داشته باشد. نمره (۱)

ثانیاً ـ مقدار m را چنان بدست آورید تا بین x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله رابطه زیر برقرار باشد. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6x_1x_2x_3$ نمره (۱/۵)

۴ـ اولا جدول ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=2\sqrt{x}-x$ را رسم کنید. نمره (۲/۵)

ثانیاً ـ مساحت سطح محصور بین منحنی و محور طول‌ها و دو خط بمعادلات $x=0$ و $x=1$ را پیداکنید. نمره (۲)

۵ـ انتگرال نامعین زیر را حساب کنید. نمره (۲)

$$I=\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{x+2}}$$

۶ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1+\sin x}{\sin x}$ را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید. نمره (۲/۵)

۷ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x+2}=1$$ نمره (۲)

۸ـ تابعی باضابطهٔ زیرمفروض است بهچه دلیل این تابع درنقطه $x=0$ ناپیوسته است. آیا این تابع در همین نقطه پیوستگی چپ یا راست دارد یا نه؟ چرا؟ نمره(۲)

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x} \text{ و } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

امتحان تهران خرداد ماه ۵۹

«مدت $۲\frac{۱}{۴}$ ساعت»

۱ـ مطلوبست محاسبه: $\lim_{x \to ۳} \frac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{۲x+۳}-۳}$ ۲ نمره

۲ـ یکی از دوتساوی زیر را به دلخواه انتخاب کرده و درستی آنرا با استفاده از تعریف حد ثابت کنید. ۲ نمره

الف: $\lim_{x \to ۱} (۳x+۵)=۸$

ب: $\lim_{x \to +\infty} \frac{۲x+۱}{x}=۲$

۳ـ معادله قائم برمنحنی نمایش $y^۲+x^۳=۹$ را در نقطه A به عرض ۱ واقع برمنحنی بدست آورید. ۲ نمره

۴ـ از سه تابع زیر دو تابع را به دلخواه اختیار نموده، جدول ومنحنی نمایش تغییرات آنها را رسم کنید. (هر کدام ۳/۵ نمره)

الف: $y=\frac{x^۲-۴x}{x^۲-۴x+۳}$

ب: $y=x+۳+\sqrt{-۳x^۲+۶x+۹}$

ج: $y=\frac{\sin x-۱}{۲\sin x+۱} \qquad ۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$

۵ـ دیفرانسیل تابع $y=\frac{x+۱}{\sqrt{(x+۲)^۳}}$ را حساب کنید و آنرا ساده نمائید. ۲ نمره

۶ـ انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف: $\int_{-۱}^{۲} \frac{x+۱}{\sqrt{x+۲}}dx$ ۲ نمره

ب: $\int \frac{-۱}{\sin^۲ x\sqrt{۱+\cot g x}}dx$ ۱/۵ نمره

ج: $\int (۲x+۳)\sqrt[۷]{(x^۲+۳x)^۲}\,dx$ ۱/۵ نمره

استان خراسان خرداد ماه ۱۳۵۷

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x+۲}{x^۲+۴}=\frac{۱}{۲}$$ (۱/۲۵ نمره)

۲ـ حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x^۳ \sin\frac{۱}{x}}{۱-\cos x}$$ (۱ نمره)

۳ـ تابع f بوسیله ضابطه زیر داده شده است

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲+۵}+\dfrac{\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲} & x\neq ۲ \\ f(۲)=۴ \end{cases}$$

ثابت کنید این تابع در نقطه $x_۰=۲$ ناپیوسته است. آیا در نقطه مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟ (۱ نمره)

۴ـ اگر $f(x)=\frac{۲x}{۱+x^۲}$ و $g(x)=tg\,۲x$ باشد. اولا حوزهٔ مقادیر $f(x)$ را تعیین کنید ثانیاً مشتق fog را به هر طریق که میتوانید محاسبه کنید. (۱ نمره)

۵ـ ثابت کنید تابع $y=\sqrt{x^۲-x^۴}$ درمبدأ مختصات می‌نیمم است ولی در این نقطه مشتق ندارد. (۱ نمره)

۶ـ اولا تحقیق کنید تابع $y=۴\sqrt{x}-x$ وقتی x درفاصله [۴ و ۰] تغییر می کند دارای تابع معکوس است و ضابطه تابع معکوس آنرا بدست آورید و دامنهٔ تعریف وحوزهٔ مقادیر تابع معکوس را تعیین کنید. (۱/۲۵ نمره)

۷ـ تابع $y=\frac{x^۲+۳}{ax+b}$ مفروض است $(a\neq ۰)$

الف ـ تحقیق کنید این تابع همواره دارای یك ماکزیمم ومی‌نیمم است

(۱ نمره)

ب ـ دو پارامتر a و b را چنان تعیین کنید که $M(1, 2)$ یکی از دو نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی تابع فوق باشد.

(۱ نمره)

ج ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^2+3}{x+1}$ را رسم کنید.

(۳/۵ نمره)

۸ـ اولا جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=x\sqrt{2-x^2}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

ثانیاً سطح محصور بین منحنی (C) و محور xها و دو خط $x=0$ و $x=1$ را محاسبه کنید.

(۱/۵ نمره)

۹ـ اولا در تعداد ریشه‌های معادله درجه سوم $x^3-3x+2m=0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید

ثانیاً اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله فوق باشند m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم.

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=3$$

(۱/۵ نمره)

۱۰ـ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\int\frac{(x^2+4x)dx}{(x+2)^4} \quad \text{و} \quad \int\frac{\sqrt{1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

(۲ نمره)

استان خراسان شهریور ماه ۱۳۵۹ «مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید (۱/۵ نمره)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

۲ـ حد تابع زیر را محاسبه کنید (۱/۵ نمره)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin 2x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

۳ـ تابع f بوسیله دستور زیر تعریف شده است

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x \leqslant 2 \text{ اگر } \\ ax+b & x > 2 \text{ اگر } \end{cases}$$

ضرائب a و b را چنان تعیین کنید تا درنقطه $x_0 = 2$ تابع $f(x)$ پیوسته ومشتق پذیر باشد (۲ نمره)

۴ـ تابع $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ مفروض است اولا تحقیق کنید درچه فاصله ازدامنه تعریفش تابع فوق دارای تابع معکوس است و ضابطه تابع معکوس را بدست آورید و دامنه تعریف و برد تابع معکوس را تعیین کنید. (۱/۵ نمره)

۵ـ تابع $y = \frac{x^2+bx+c}{x^2+bx-2}$ مفروض است اولا b و c را چنان بیابید که منحنی نمایش تابع از مبدأ مختصات گذشته وخط $x = \frac{-1}{2}$ محور تقارن منحنی باشد. (۱ نمره)

ثانیاً جدول تغییرات ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y = \frac{x^2+x}{x^2+x-2}$ را رسم کنید (۳/۵ نمره)

ثالثاً اگر خط $y = m$ منحنی (c) را در دونقطه مانند A و B قطع کند معادله مکان هندسی نقطه P وسط خط AB را وقتی پارامتر m تغییر می کند تعیین کنید. (۱ نمره)

۶ـ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y = 1 + x^2 + \sqrt{x^2-1}$ را رسم کنید. (۴ نمره)

۷ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

(۱) $$\int \frac{(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x^2+2x\sqrt{x}}}dx$$ (۲ نمره)

(۲) $$\int \sin\frac{2}{x}\sqrt{1+\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$$ (۲ نمره)

استان زنجان خرداد ۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ از روی تعریف حد ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to 1}(x^{2}+x+5)=7$ (۲ نمره)

۲ـ تابع $y=\dfrac{x^{2}-4x}{x^{2}+ax+b}$ مفروض است اولا: a و b را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $S\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$ نقطهٔ می‌نیمم تابع فوق باشد (۱/۵ نمره)

ثانیاً: جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y=\dfrac{x^{2}-4x}{x^{2}-4x+3}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

۳ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y=\sqrt{x^{2}-2x-3}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

۴ـ مشتق تابع $y=Arcsin 3x$ را حساب کنید (۱ نمره).

۵ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y=\cos^{2}x-\cos x$ را در فاصله $[0 \text{ و } 2\pi]$ رسم کنید (۳ نمره)

۶ـ تابع $y=\dfrac{x^{2}+a}{x^{2}+x+4}$ مفروض است اولا: بدون استفاده ازمشتق معادلهٔ درجه دومی برحسب پارامتر a تشکیل دهید که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق باشد (۲ نمره) ثانیاً: a را طوری حساب کنید که عرض نقطهٔ ماکزیمم تابع فوق(۲) باشد. (۱ نمره).

۷ـ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\int (x^{2}+4)(x+1)^{3}dx \quad \text{و} \quad 4\int \frac{\sin x}{\cos^{5}x}dx$$

(۲ نمره) (۱/۵ نمره)

سمنان خردادماه ۱۳۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ مطلوب است محاسبه $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ (بهر روشی که میدانید) (۱/۵ نمره)

۲ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$ (۲ نمره)

۳ـ دیفرانسیل تابع $y = Arctg\sqrt{x} + Arc\sin 2x$ را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

۴ـ از نقطه‌ای بطول ۲ واقع برمنحنی تابع $y = \sqrt{2x^2+1}$ مماسی رسم میکنیم معادله این مماس را بنویسید (۱/۵ نمره)

۵ـ تابع $y = \frac{ax^2+bx-5}{x+c}$ مفروض است. ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید تا خطوط $x = 4$ و $y = 2x+7$ مجانبهای منحنی این تابع باشند. (۱/۵ نمره)

۶ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ را رسم کنید (۳ نمره)

۷ـ جدول تغییرات و منحنی تابع اصم $y = 1 + \sqrt{2x - x^2}$ را رسم کنید (۳ نمره)

۸ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y = \frac{\sin x}{2\sin x - 1}$ را در فاصله صفر و 2π رسم کنید (۳ نمره)

۹ـ انتگرال نامعین زیر را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+5}}$$

۱۰ـ انتگرال معین زیر را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x dx$$

استان فارس خرداد ماه ۵۹ «مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ تساویهای زیر را با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

الف ـ $\lim_{x\to 1}\frac{-4}{(x-1)^2}=-\infty$ (۱/۵ نمره)

ب ـ $\lim_{x\to 3}|2x-7|=1$ (۱ نمره)

۲ـ تابع $f(x)=4[x]+3[-x]$ داده شده است:

اولاً ـ اگر $x\to n$ حد چپ و حد راست تابع را بدست آورید. آیا تابع دراین نقطه حد دارد؟

ثانیاً ـ پیوستگی تابع را بازاء $x_0=n$ بررسی کنید. (۲ نمره)

(n عدد صحیح و $[x]$ بزرگترین عدد درست کوچکتر یا مساوی x میباشد)

۳ـ مطلوبست محاسبه حد زیر: (۲ نمره)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2-7x-3}\right)$$

۴ـ معادله خط مماس بر منحنی $y=Arcsin x$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{\sqrt{3}}{2}$ بنـویسید. (۱/۵ نمره)

۵ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\frac{\cos 2x}{\cos x}$ را در فاصله $[0 , 2\pi]$ رسم کنید. (۳/۵ نمره)

۶ـ تابع $y=\frac{ax^2+bx+1}{x+c}$ مفروض است

الف ـ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که منحنی تابع دارای دومجانب بمعادلات $x=3$ و $y=x+1$ باشد. (۱/۵ نمره)

ب ـ از نقطه o (مبدأ مختصات) خط غیر مشخصی رسم می‌کنیم تا منحنی تابع $y=\frac{x^2-2x+1}{x-3}$ را در نقاط M و N قطع کند مکان هندسی نقطه P مزدوج توافقی O را نسبت به M و N بدست آورید. (۲ نمره)

۷ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y=1+\sqrt{x^2-2x+2}$ را رسم کنید. (۳نمره)

۸ـ سطح محصور بین منحنی تابع $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x+9}}$ و محـور xها و خطوط $x=0$ و $x=7$ را بدست آورید. (۲نمره)

استان کرمانشاهان خردادماه ۵۹ «مدت ۲/۵ ساعت»

مسئله اول : پیوستگی تابع

$$f(x)\begin{cases} x^۲-\dfrac{۳x\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲} & \text{اگر } x\neq ۲ \\ -۲ & \text{اگر } x=۲ \end{cases}$$

را در نقطهٔ $x_{\circ}=۲$ بررسی کنید. ۱/۵ نمره

مسئله دوم : بکمك استلزام منطقی ثابت کنید

الف ــ حد $\dfrac{۴x^۲-۹}{۲x+۳}=۱$ وقتی $x\longrightarrow ۲$ ۱/۵ نمره

ب ــ حد $\dfrac{۵x+۳}{۲x+۱}=\dfrac{۵}{۲}$ وقتی $x\longrightarrow +\infty$ ۱/۵ نمره

مسئله سوم : حد تابع $y=۲x+\sqrt{۴x^۲+۳x-۵}$ راوقتی x بسمت $\pm\infty$ میل‌میکند تعیین کنید. ۱ نمره

مسئله چهارم : معادلات خطوط مماس وقائم برمنحنی تابع:

$$۲y^۲+x^۲-۲xy-۳x+۴y=\circ$$

را در نقطهٔ $A(۳ , ۱)$ که برمنحنی واقع است بدست آورید. ۱/۵ نمره

مسئله پنجم : دیفرانسیل تابع مقابل را بدست‌آورید. $d[\cos^۴\sqrt[۳]{x}+۲tg^۴\dfrac{x}{۸}]=$ ؟ ۱ نمره

مسئله ششم : انتگرال تابع مقابل را بدست آورید. $\displaystyle\int\frac{cotg^۳x}{\sqrt[۳]{\sin^۲x}}dx=$ ؟ ۱/۵ نمره

مسئله هفتم : مساحت سطح محصور بین منحنی تابع $y=۳-۳x^۲$ و محور xها را بدست‌آورید (رسم شکل لازم نیست) ۱/۵ نمره

مسئله هشتم : جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع کسری $y=\dfrac{x+۲}{x^۲-x-۲}$ را رسم کنید. ۳ نمره

مسئله نهم : تابع $y=\dfrac{x^۲-۲ax+۳}{۲x-۱}$ مفروض است مقدار a را طوری بیابید که مجموع ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق برابر ۳ شود. ۱/۵ نمره

مسئله دهم : اولا جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=x-۲\sqrt{x^۲+۱}$ را رسم کنید. ۳ نمره

ثانیاً ــ خط $y=m$ منحنی تابع فوق را در دونقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ قطع میکند مکان هندسی نقطهٔ P وسط $M_۱M_۲$ را تعیین کنید. ۱/۵ نمره

استان کرمانشاهان شهریور ماه ۱۳۵۷

«مدت ۲/۵ ساعت»

مسئله اول: پیوستگی تابع:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+3)\sqrt{(x-2)^2}}{(2x+3)(x-2)} & \text{و} \quad x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

را درنقطهٔ ۲ $x_0=2$ بررسی کنید.

۱ نمره

مسئله دوم: بطریق استلزام منطقی ثابت کنید $\lim_{x\to 2}\dfrac{5}{(x-2)^2}=+\infty$ است.

۱/۵ نمره

مسئله سوم: تابع $y_1=x+\sqrt{x^2+4x}$ مفروض است دامنهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر آنرا تعیین وسپس ثابت کنید که ضابطهٔ معکوس آن بصورت $y_2=\dfrac{x^2}{2x+4}$ میباشد.

۱/۵ نمره

مسئله چهارم: تابع $y=\dfrac{ax^2+2x+b}{x^2-4}$ مفروض است: اولا ــ a و b را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $m\Big|_{0}^{-1}$ نقطه ماکزیمم یامی‌نیمم تابع فوق‌باشد.

۱ نمره

ثانیاً ــ جدول تغییرات ومنحنی تابع $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-4}$ را رسم کنید.

۲/۵ نمره

مسئله پنجم: معادلات مجانبهای منحنی تابع $y=1+x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ راتعیین کنید.

۱/۵ نمره

مسئله ششم: دیفرانسیل توابع زیر را حساب کنید. الف : $d[tg^4\sqrt[4]{x}-\cos^4\dfrac{1}{x}]=?$

۰/۵ نمره

ب : $d[\arcsin\sqrt{1-x^2}+\text{arccotg}\,\frac{x}{2}]=?$

۰/۵ نمره

مسئله هفتم : سطح محصور بین منحنی تابع $y=3x^2+\frac{2}{x^2}+5$ و محور x ها و خطوط $x=1$ و $x=-1$ را بدست آورید.

۱/۵ نمره

مسئله هشتم: در معادلهٔ درجه سوم $x^3-2x^2+m+1=0$ حدود m را چنان بیابید که معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی باشد.

۱/۵ نمره

مسئله نهم: جدول تغییرات و منحنی تابع $y=\sin x(1-\cos x)$ را درفاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۳ نمره

مسئله دهم: اولا ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y=(x-2)\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید.

۲/۵ نمره

ثانیاً ـ حجم حادث از دوران منحنی تابع فوق حول محور xها و خطوط $x=-2$ و $x=2$ را بدست آورید.

۱/۵ نمره

استان مازندران خردادماه ۱۳۵۹

«مدت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت»

مسئله اول: باکمك استلزام منطقی ثابت کنید.

$$\lim_{x \to ۱} \left(x^۲+۱-\frac{۱}{x+۲}\right)=\frac{۵}{۳}$$ (۲ نمره)

مسئله دوم: تابع f با دستور زیر داده شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-\dfrac{\sqrt{(x-۱)^۲}}{x-۱} & \text{اگر } x\neq ۱ \\ f(۱)=۲ & \text{اگر } x=۱ \end{cases}$$

پیوستگی تابع را در نقطه $x_۰=۱$ بررسی کرده و نمودار آن را درصفحه مختصات قائم رسم کنید. (۳/۲۵ نمره)

مسئله سوم: ۱ــ درتابع $y=\dfrac{x^۲+ax+b}{x^۲-ax+b}$ a و b را طوری پیدا کنید که بازاء $x=۲$ تابع دارای ماکزیممی برابر ۹ــ باشد (۱ نمره)

۲ــ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x^۲+۵x+۴}{x^۲-۵x+۴}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره)

۳ــ اگرخط $y=m$ منحنی را در نقاط M' و M'' و محور عرضها را درنقطه‌ای مانند P قطع کند مطلوبست مختصات نقطه M وسط $M'M''$ و نقطه P' مزدوج توافقی P نسبت به M' و M'' برحسب m و مکان هندسی این‌نقطه وقتیکه m تغییر کند. (۲/۲۵ نمره)

مسئله چهارم: جدول جهت تغییرات نمودار تابع $y=x-۱+\sqrt{x^۲-۲x+۳}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره)

مسئلهٔ پنجم: جدول جهت تغییرات و نمودار تابع $y=\dfrac{۲\sin x-۱}{۲\sin x+۱}$ را درفاصلهٔ $(۰, ۲\pi)$ رسم کنید. (۳/۲۵ مره)

مسئله ششم: انتگرال زیر را حساب کنید (۱/۲۵ نمره)

$$I=\int\frac{x^۳}{\sqrt{۱+x^۲}}dx$$

دبیرستان البرز ۶۰/۲/۱۹

«مدت $1\frac{3}{4}$ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2}{x-2}=7 \qquad \text{(۲ نمره)}$$

۲ـ تابع $f(x)=kx^n$ وقتی $x\to 0$ هم‌ارز تابع $g(x)=x-\sin x$ است n و k را تعیین کنید. (۱/۵ نمره)

۳ـ پیوستگی تابع $f(x)=x[x]-|x-1|$ را در فاصله]۲ و ۱[بررسی کنید. (۱/۵ نمره)

۴ـ هذلولی بمعادله $y=\frac{ax^2+b}{cx}$ مفروض است $(c\neq 0)$

a و b و c را چنان تعیین کنید که حاصلضرب طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع برابر ۱ــ و قدر مطلق تفاضل ماکزیمم ومینیمم برابر عدد ۴ باشد. (۲ نمره)

سپس جدول تغییرات و منحنی $y=\frac{x^2+1}{x}$ را رسم کنید. (۲ نمره)

۵ـ اولا ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی تابع $y=x-\sqrt{\frac{2}{x+1}}$ (۲/۵ نمره)

ثانیاً ـ ثابت کنید تابع دردامنه تعریف خود معکوس پذیراست. (۱ نمره)

ثالثاً ـ معادله خط مماس برمنحنی تابع معکوس از نقطه‌ای بطول صفرواقع برمنحنی تابع معکوس را بنویسید. (۱/۵ نمره)

رابعاً ـ سطح محصور از منحنی را با محورطول در فاصله دو خط $x=0$ و $x=3$ را تعیین کنید. (۲ نمره)

۶ـ یکی از انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int 16\sin^2 3x\cos^2 2x\,dx \quad \text{و} \quad \int\frac{(2x^2-x)dx}{x+\sqrt{x^2-x}} \qquad \text{۱/۵ نمره}$$

۷ـ جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y=\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}$ را درفاصله صفر و 2π رسم کنید. (۲/۵ نمره)

استان تهران خرداد ماه ۶۰

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ درستی تساوی $\lim_{x \to 1} \frac{4x^2-4}{x-1} = 8$ را با استفاده از تعریف حد تحقیق نمائید.

۱ نمره

۲ـ تابع f بوسیله دستور $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{اگر } x>1 \\ x-1 & \text{اگر } x<1 \\ 0 & \text{اگر } x=1 \end{cases}$ داده شده است،

پیوستگی چپ، پیوستگی راست، بطورکلی پیوستگی آنرا در نقطه‌ای بطول ۱ بررسی کنید.

۱ نمره

۳ـ بکمك قانون هوپیتال حد تابع $f(x)=\frac{tgx-x}{x-\sin x}$ را وقتی $x \to 0$ بدست آورید.

۱ نمره

۴ـ جهت تقعر و مختصات نقاط عطف تابع $y=\frac{2x}{3x^2+2}$ را تعیین وتحقیق کنید که نقاط عطف بر یك استقامت‌اند.

۲ نمره

۵ـ تابع $y=\frac{a(x^2-1)}{x^2-4}$ مفروض است.

اولا ـ تحقیق کنید نمایش هندسی تمام منحنی‌هائی که بازاء مقادیر مختلف a در تابع فوق بدست میآیند از دو نقطه ثابت A و B که مختصات آنها را تعیین میکنید میگذرند. ۱ نمره

ثانیاً ـ a را طوری تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطه‌ای از منحنی بطول ۱ بر خط $3x-2y+1=0$ عمود گردد.

۱ نمره

۶ـ ازسه‌تابع زیر دوتا رابه‌دلخواه انتخاب کرده، جدول تغییرات ومنحنی نمایش هندسی آنها را رسم کنید.

۷ نمره

$$I) \quad y=\frac{x^3}{x^2-4} \qquad II) \quad y=\frac{\cos x}{1-2\sin^2 x} \quad \frac{\pi}{2} \geqslant x \geqslant -\frac{\pi}{2}$$

$$III) \quad y=x+2-\sqrt{x^2-9}$$

۷ـ درو‌جود وعلامت ریشه‌های معادله درجه‌سوم $(2-m)x^3-3x^2+1=0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

۲ نمره

۸ـ دیفرانسیل تابع $y=\frac{۳x^{۲}}{x^{۲}+۴}+Arctg x$ را حساب کنید. ۱ نمره

۹ـ یکی از دو انتگرال زیر را به دلخواه انتخاب کرده و آنرا محاسبه نمائید. ۱/۵ نمره

$$I)\quad \int \frac{\sin^{۲}x}{\sqrt{۱+tg^{۲}x}}dx \quad \frac{\pi}{۲}>x>-\frac{\pi}{۲} \qquad II)\quad \int \frac{۱۲x^{۳}}{\sqrt{۳+۲x^{۲}}}dx$$

۱۰ـ یکی از دو تمرین زیر را به دلخواه انتخاب و حل نمائید. ۱/۵ نمره

I) مساحت سطح محصور بین دو منحنی نمایش هندسی دو تابع $y=x^{۳}+۲$ و $y=۲x^{۲}-x+۲$ را بدون رسم منحنی، حساب کنید.

II) سطح بین منحنی نمایش هندسی تابع $y=\sqrt{۱۵}(x^{۲}+۱)$ و محور xها و دو خط به معادلات $x=۰$ و $x=۱$ را حول محور xها دوران میدهیم حجم حادث چقدر است؟

